

НАРХОЗ УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ 004.932; 517.443

Қолжазба құқығында

УРЫНБАСАРОВА АЛТЫН ЖУМАСИТОВНА

**Жүйелердегі сигналдарды өңдеу мәселелерін шешу үшін гибриді
түрлендірулерді құру**

6D070300 – «Ақпараттық жүйелер»

Философия докторы (Ph.D.)
дәрежесін алу үшін жазылған диссертация

Ғылыми кеңесшісі:
техника ғылымдарының докторы,
профессор
Утепбергенов И.Т.

Шетелдік ғылыми кеңесшісі:
Ph.D., профессор
Мохд Юнус Бхат (Mohd Younus Bhat)
(Үндістан)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2025

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР.....	4
АНЫҚТАМАЛАР.....	5
БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР.....	7
КІРІСПЕ.....	10
1 ЗЕРТТЕУ МӘЛІМЕТТЕРІ.....	21
1.1 Фурье түрлендіруі (FT).....	21
1.2 Вигнер-Вилле үлестірімі (WVD).....	22
1.3 Канондық түрлендірулер.....	24
1.3.1 Сызықтық канондық түрлендіру (LCT).....	24
1.3.2 Офсетті сызықтық канондық түрлендіру (OLCT).....	25
1.4 Үздіксіз вейвлет түрлендіруі (CWT).....	28
1.5 Толқындық пакетті түрлендіру (WPT).....	28
1.6 Квадраттық фазалық Фурье түрлендіруі (QPFT).....	29
1.7 Үздіксіз квадраттық фазалық вейвлет түрлендіру (CQPWT).....	29
1.8 Кватернион бөлшек Фурье түрлендіруі (QFrFT).....	30
1.9 Алдыңғы зерттеу нәтижелері.....	32
Бірінші бөлім бойынша тұжырымдар.....	36
2 ВИГНЕР-ВИЛЛЕ ҮЛЕСТІРІМІНДЕГІ ОФСЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ КАНОНДЫҚ ТҮРЛЕНДІРУ (WOL).....	37
2.1 WOL анықтамасы.....	37
2.2 WOL қасиеттері.....	38
2.3 WOL-дың анықталмағандық принципі.....	43
Екінші бөлім бойынша тұжырымдар.....	45
3 КВАДРАТТЫҚ-ФАЗАЛЫҚ ТОЛҚЫНДЫ ПАКЕТТІ ТҮРЛЕНДІРУ (QR-WPT).....	46
3.1 QR-WPT анықтамасы.....	46
3.2 QR-WPT қасиеттері.....	49
3.3 QR-WPT-дің анықталмағандық принциптері.....	53
Үшінші бөлім бойынша тұжырымдар.....	60
4 ГИБРИДТІ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРДІҢ ҚОЛДАНЫСТАРЫ.....	61
4.1 LFM сигналын анықтау.....	61
4.1.1 WOL арқылы бір компонентті LFM сигналын анықтау.....	61
4.1.2 WOL арқылы би-компонентті LFM сигналын анықтау.....	62

4.1.3 Симуляция нәтижелері	63
4.1.4 Симуляциялар жасауға арналған қолданба.....	72
4.2 Сигналды қайта құру.....	79
4.2.1 WOL арқылы сигналды қайта құру.....	79
4.2.2 QR-WPT арқылы сигналды қайта құру.....	80
4.3 Гибридті құралдардың пайдаланылу сценарийлері.....	81
Төртінші бөлім бойынша тұжырымдар.....	82
5 КВАТЕРНИОН БӨЛШЕК ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ (QFrFT).....	83
5.1 QFrFT конвульсиясы.....	83
5.2 Ықтималдық теориясындағы QFrFT.....	84
Бесінші бөлім бойынша тұжырымдар.....	87
ҚОРЫТЫНДЫ.....	89
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	92
ҚОСЫМША А – ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған басылымдар тізіміне кіретін «АУЭС Хабаршысы» журналына жіберілген мақала бойынша мәлімет.....	102
ҚОСЫМША Ә – Кітапхана анықтамасы.....	103
ҚОСЫМША Б – Енгізу актысы.....	104
ҚОСЫМША В – Анықтама.....	105
ҚОСЫМША Г – MATLAB кодтары.....	106
АРНАУ.....	107

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертациялық жұмыста келесідей стандарттарға сілтемелер қолданылған:

МемСТ 7.32-2001. Кітапхана және баспа ісі бойынша стандарттар жүйесі. Ғылыми-зерттеу жұмысы бойынша есеп. Құрылымы және рәсімдеу ережесі.

ҚР СТ 34.005-2002. Ақпараттық технология. Негізгі терминдер мен анықтамалар.

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орынан кейінгі білім. Докторантура. Негізгі ережелер / ҚР Білім және ғылым министрімен бекітілген. «17» маусым 2011ж. №261.

КеАҚ Нархоз университетінің ғылыми кеңесінің шешімімен бекітілген Докторлық диссертацияны орындау жөніндегі ереже (27 қазан 2020 жыл №3 хаттама).

Қазақстан Республикасының Заңы. Ғылым туралы: 2011 жылғы 18 ақпанда қабылданды, №407-IV (01.05.2023ж. жағдай бойынша өзгерістер мен толықтырулармен).

АНЫҚТАМАЛАР

Бұл диссертациялық жұмыста төмендегі анықтамалармен келесідей терминдер пайдаланылады:

Анықталмағандық принципі / анықталмағандық теңсіздігі – физикалық жүйені сипаттайтын шамалардың (мысалы, координат және импульс) бір мезгілде дәл мәндер қабылдай алмайтындығын тұжырымдайтын кванттық теорияның іргелі қағидасы.

Анықтау (detection, обнаружение) – жалпы айтқанда, жіберушімен нақты ынтымақтастықсыз ақпаратқа қол жеткізу әрекеті. Сигналды анықтау – ақпараттық жүйелердегі іргелі процесс.

Вейвлет – бұл белгілі бір қасиетке ие математикалық функциялар. Ағылшынша «wavelet» сөзі «кішігірім толқын» немесе «бір-бірінің артынан ілескен толқындар» дегенді білдіреді. Екі аударма да вейвлет анықтамасына сәйкес келеді. Вейвлеттер – уақыт пен жиілікте локальді (өлшемі «кішігірім») болатын және барлық функциялар уақыт осі бойымен жылжыту және созу арқылы («бір-бірінің артынан ілескен толқындар» тәріздес) бір функциядан алынатын функциялар тобы. Тар мағынада бұл ана функцияны масштабтау және жылжыту арқылы алынатын функциялардың жиынтығы. Масштабтың өзгеруіне байланысты, бұл толқындар әртүрлі ауқымда сигнал мүмкіндіктерін анықтайды және жылжыту арқылы барлық нүктелердегі сигналды талдай алады. Кеңінен айтсақ, вейвлеттер – орташа мәні нөлге тең болған уақытша жиіліктегі локализацияға ие функциялар. Вейвлеттер сигналдар мен кескіндерді өңдеуде, атап айтқанда, оларды қысу және шуды жою үшін кеңінен қолданылады.

Импульс – кеңістікте немесе ортада таралатын бір реттік жарқыл.

Интегралдық түрлендіру – функцияны бастапқы функция кеңістігінен басқа функция кеңістігіне интеграциялау арқылы көрсететін түрлендіру.

Пиксель – сандық бейнелердегі ең кіші элемент, басқаша айтқанда, экранда немесе суретте белгілі бір түсті көрсететін шағын нүкте. Неғұрлым көп пиксель болса, соғұрлым сурет (кескін) анық болады. Әр пиксель қызыл (Red), жасыл (Green) және көк (Blue) түстерінің қоспасынан (RGB) тұрады. Пиксель фото, видео, компьютерлік графика және экран технологияларында маңызды рөл атқарады.

Сигнал – уақыт функциясы арқылы сипатталатын уақыт бойынша өзгеретін физикалық шама, яғни белгілі бір құбылыстың ақпараты туралы айтатын функция. Ақпарат және байланыс (коммуникация) теориясында сигнал – байланыс жүйесінде хабарламаларды жіберу үшін қолданылатын ақпарат тасымалдаушы болып табылады. Ақпараттық жүйелер теориясында сигнал — ақпаратты тасымалдайтын уақыт бойынша өзгеретін шама немесе оқиға.

Сигналдарды өңдеу – ақпаратты қалпына келтіру, ақпарат ағындарын бөлу, шуды басу, деректерді қысу, сүзу, сигналды күшейту және т.б. жүзеге асырылатын зерттеу саласы.

Табиғи сигналдар – табиғатта пайда болатын сигналдар. Дыбыстар, музыка, кескін, бейне (видео), сейсмикалық сигналдар, биомедициналық

сигналдар (жүйке белсенділігі, жүрек соғуы, т.б., және электроэнцефалограмма (ЭЭГ), электрокардиограмма (ЭКГ), т.б.) табиғи сигналдар болып табылады.

Уақыт-жиілік талдауы – әртүрлі уақыт жиілік үлестірімдерін пайдалана отырып, бір уақытта уақыт және жиілік облыстарындағы сигналды зерттейді.

Фурье талдауы – жалпы математикалық функцияларды қарапайым тригонометриялық функциялардың қосындысы арқылы көрсетуге болатынын зерттейтін талдау саласы. Фурье талдауы сигналдарды өңдеу, цифрлық кескіндерді өңдеу, физика, дифференциалдық теңдеулер, сандар теориясы, комбинаторика, ықтималдықтар теориясы, сандық талдау, статистика, геометрия, криминалистика, криптография, акустика, океанография, телекоммуникация, ақуыздардың құрылымдық талдауы және басқа салаларда көптеген қолданыстары бар. Бұл кең қолдану мүмкіндігі оның көптеген пайдалы қасиеттеріне байланысты қолжетімді.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

Қысқартулар	Белгілеулер	Әлемдік атаулар	Қазақша атаулар
1D		One dimensional	Бір өлшемді
CDF	$F_x(x)$	Cumulative distribution function	Кумулятивтік таралу функциясы
CNN		Convolutional neural network	Конвульсиялық нейронды желі
CQPWT	$CQPWT_f$	Continuous quadratic-phase wavelet transform	Үздіксіз квадраттық фазалық вейвлет түрлендіруі
CWT	CWT_f	Continuous wavelet transform	Үздіксіз вейвлет түрлендіруі
FT	$\mathcal{F}_f$	Fourier transform	Фурье түрлендіруі
FrFT		Fractional Fourier transform	Бөлшек Фурье түрлендіруі
Fr-WPT		Fractional wave packet transform	Бөлшек толқындық пакетті түрлендіру
LCT	$\mathcal{L}_A$	Linear canonical transform	Сызықтық канондық түрлендіру
LCWD	$\mathcal{WD}_A$	Linear canonical Wigner distribution	Сызықтық канондық Вигнер үлестірімі
LC-WPT		Linear canonical wave packet transform	Сызықтық канондық толқындық пакетті түрлендіру
LFM		Linear-frequency-modulated	Сызықтық-жиілікті-модуляцияланған
LTI systems		Linear time-invariant systems	Сызықтық уақыт бойынша инвариантты жүйелер
OLCT	$\mathcal{O}_A$	Offset linear canonical transform	Офсетті сызықтық канондық түрлендіру
QFT	$\mathcal{F}$	Quaternion Fourier transform	Кватернион Фурье түрлендіруі
QFrFT	$\mathcal{F}_\beta(u)$	Quaternion fractional Fourier transform	Кватернион бөлшек Фурье түрлендіруі
QLCT		Quaternion linear	Кватернион сызықтық

QPW	$\psi_{\beta,\alpha}^A$	canonical transform Quadratic-phase wavelet	канондық түрлендіру Квадраттық фазалық вейвлет
QPFT	$\mathcal{Q}_A$	Quadratic-phase Fourier transform	Квадраттық фазалық Фурье түрлендіруі
QPFWT		Quadratic-phase Fourier wavelet transform	Квадраттық фазалық Фурье вейвлет түрлендіруі
QP-WPT	$\mathcal{W}_f^\mu$	Quadratic-phase wave packet transform	Квадраттық фазалық толқындық пакетті түрлендіру
PDF	$f_x(x)$	Probability density function	Ықтималдық тығыздық функциясы
STFT		Short-time Fourier transform	Қысқа мерзімді Фурье түрлендіруі
WVD	$\mathcal{W}_f$	Wigner-Ville distribution	Вигнер-Вилле үлестірімі
WVD-LCT	$\mathcal{WDL}_f$	Wigner-Ville distribution in the linear canonical transform domain	Вигнер-Вилле үлестіріміндегі сызықтық канондық түрлендіру
WVD-OLCT	$\mathcal{WDO}\mathcal{L}_f$	General Wigner-Ville distribution in the linear canonical transform domain	Вигнер-Вилле үлестіріміндегі офсетті сызықтық канондық түрлендіруінің жалпы түрі
WL	$\mathcal{WL}_f$	Wigner-Ville distribution associated with the instantaneous autocorrelation function in the linear canonical transform	Сызықтық канондық түрлендіруде лездік автокорреляция функциясымен байланысқан Вигнер-Вилле үлестірімі
WOL	$\mathcal{WOL}_f$	Wigner-Ville distribution in the offset linear canonical transform domain	Вигнер-Вилле үлестіріміндегі офсетті сызықтық канондық түрлендіру
WT		Wavelet transform	Вейвлет түрлендіруі
WFT	$\mathcal{G}_\phi$	Windowed Fourier transform	Терезелік Фурье түрлендіруі

WPT	$\mathcal{WPT}_f$	Wave packet transform	Толқындық пакетті түрлендіру
	t		Уақыт
	u		Жиілік
	f, g, h		Сигналдар
	$R_f(t, \tau)$	Instantaneous autocorrelation function	Лездік автокорреляция функциясы
	A		Параметр матрица немесе вектор
	$a, b, c, d, u_0, \omega_0$		A матрицасының параметрлері, нақты сандар
	K	Kernel	Кернелі
	ψ, ϕ	Wavelets	Вейвлеттер
	α	Scaling parameter	Масштабтау параметрі
	$\mathcal{WL}_g$		g сигналының WL түрлендіруі
	$\mathcal{W}_h$		h сигналының WVD-i
	$u_i(t)$		Лездік жиілік
	$\mathbb{H}$	Quaternion	Кватернион
	$\mathbb{C}$	Complex	Комплекс
	i, j, k		Жорамал бірліктер
	A_β		Нормалау тұрақтысы

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Инженерияның барлық саласында Фурье түрлендіруі (FT) [1-6] кездеседі, сол себепті де оның әртүрлі аспектілерін дамыту және түсіну өте маңызды. FT стационар (тұрақты) сигналдарды сипаттайды. Табиғи сигналдар (аудио, бейне, биомедициналық, сызықтық-жиілікті-модуляцияланған (LFM) және т.б. сигналдар) стационар емес (тұрақты емес), ал FT мұндай сигналдарды сипаттау үшін жеткіліксіз. Стационар емес сигналдарды зерттеу үшін сызықтық канондық түрлендіру (LCT) [7-25] және оның жалпы түрі оффсетті сызықтық канондық түрлендіру (OLCT) [26-30] ұсынылған. OLCT-дің бес еркін параметрі, ал LCT-дің үш еркін параметрі бар. Бұл оларды бір еркін параметрі бар бөлшекті Фурье түрлендіруі (FrFT) [9, 31-34] және еркін параметрі жоқ FT-мен салыстырғанда икемдірек етеді. LCT әртүрлі салаларда түрлі қолданыстар тапты. Мысалы, оптикада оптикалық жүйелердің кең класын LCT арқылы модельдеуге болады. Сондай-ақ, LCT сигналдарды өңдеудің көптеген қолданыстарында тиімді. Мысалы, уақыт жиілігін талдау, сүзгі дизайны, сигнал синтезі, фазаларды қайта құру, шифрлау, радар (радиолокатор) мен сонар (гидролокатор) жүйелерінде, және т.б. [10, 14, 19, 22, 24, 35]. Шын мәнінде, OLCT-дің қасиеттері мен қолданыстары LCT-ге ұқсас, бірақ олар LCT-ге қарағанда жалпы. Мысалы, LCT оптикалық жүйелерді модельдей алғанымен, призмалар немесе жылжымалы линзалармен оптикалық жүйелерді талдай алмайды. Ал OLCT оптикалық жүйелерді модельдей де алады, әрі призмалар немесе жылжымалы линзалармен талдауға да қабілетті.

Вигнер-Вилле үлестірімі (WVD) [36-42] квази ықтималдық үлестірімінің ерекше түрі болып табылатыны дәлелденген. WVD сигналды уақыт-жиілік талдауда және сигналды өңдеуде үлкен рөл атқарады [37]. Итеративті алгоритм [43-44], чирп-Фурье түрлендіруі әдісі [45], Радон-айқынсыз түрлендіруі (Radon-ambiguity transform) [46] және Вигнер-Хав түрлендіруі (Wigner-Hough transform) [47] сияқты көптеген белгілі уақыт-жиілік талдауы әдістерінің ішінде WVD үлестірімі LFM сигналын анықтауда (detection, обнаружение) және параметрді бағалауда (estimation, оценка) жоғары айқындық бере алатын маңызды және құнды әдіс болып табылады. LFM сигналы ақпараттық байланыс, радиолокациялық және гидролокациялық жүйелерде қолданылады. Демек, LFM сигналын анықтау [48] және бағалау [49] инженериядағы ең маңызды тақырыптардың бірі болып табылады. WVD және LCT/OLCT түрлендірулері LFM сигналдарын өңдеуде қолданылады, дегенмен олардың кемшіліктері бар:

- WVD үлестірімі LFM сигналының фазалық мүмкіндігін толық пайдалана алмайды;
- LCT/OLCT түрлендірулері сигнал энергиясын WVD сияқты жинай алмайды.

Бұл кемшіліктер сигналды анықтау және бағалау үшін төмен сигнал-шу қатынасында нашар өнімділікке әкеледі. Осы мәселені шешу өзекті мәселе болып тұр.

Өмірде кездесетін сигналдар тұрақты емес немесе уақыт бойынша ауыспалы, яғни тұрақсыз болатыны белгілі. Мұндай сигналдарды зерттеу үшін WVD, LCT, OLCT-ден басқа қысқа мерзімді Фурье түрлендіруі (STFT) [50], вейвлет түрлендіруі (WT) [51-52] анықталған болатын. STFT-мен салыстырғанда WT сигналды жақсырақ суреттейді. Алайда, WT кемшіліксіз емес. Жоғары жиілікті аймақта WT-нің жиілік ажыратымдылығы нашар. Осындай кемшіліктерді жою өзекті мәселе.

Соңғы уақыттардағы техниканың қарқынды дамуы кезінде түсті суреттер (кескіндер) алғашында жақсы зерттелген деген ой келеді. Шындығында, әлі күнге дейін жоғары сапалы медициналық суреттер, бейне қоңыраулар (видеозвонки), компьютердің не жасанды интеллекттің (Artificial Intelligence (AI)) таңбаларды тануына (мысалы: сканерленген беттегі математикалық формулаларды өңделетін түрге келтіру) қолымыз жетпеген. Осындай мәселелердің шешімінің бастамасы ретінде пиксельді кватернион деп қарастыратын теорияны зерттеу өзекті тақырып.

Тақырыптың зерттелу деңгейі. FrFT, LCT және классикалық WVD қасиеттеріне сүйене отырып, Пей мен Дин (Pei and Ding) сигналдың WVD-ін зерттеп, жалпы бөлшек және канондық операторлар арасындағы қатынастарды талқылады [53]. 2012 жылы Бай және т.б. (Bai *et al.*) уақыт-жиілік жазықтығындағы автокорреляция функциясының $f(x)$ аффиндік түрлендіруін қарастырды, яғни LCT доменінде WVD-дің жалпы түрін (WVD-LCT) ұсынды [54]. WVD-LCT – FT-дің ортогональды кернелін сызықтық канондық түрлендірудің ортогональды емес кернелімен алмастыру арқылы алынған сигналды өңдеудің жаңа және маңызды құралы. Осыған қоса, [54]-те авторлар WVD-LCT-дің негізгі қасиеттерін зерттеді және оларды LFM сигналын анықтау үшін пайдаланды. Соң және т.б. (Song *et al.*) WVD-LCT-ді тереңірек зерттеп, оның квадраттық-жиілікті-модуляцияланған сигнал параметрлерін бағалауға арналған қолданыстарын көрсетті [55]. Кейінірек WVD-LCT үшін конволюция және корреляция теоремалары алынды [56]. Бай және т.б. анықтаған LCT-мен байланысты WVD теориясы 2018 жылы OLCT-ге кеңейтілген, яғни Вигнер-Вилле үлестіріміндегі офсетті сызықтық канондық түрлендіруінің жалпы түрі (WVD-OLCT) алынған, және оның қасиеттері мен қолданыстары сипатталған болатын [57]. Жалпы айтқанда, LFM сигналын анықтау және бағалау өнімділігін жақсарту мақсатында, және басқа да қасиеттері мен қолданыстарын зерттеп, бірнеше зерттеушілер WVD-ді сәйкесінше FrFT, LCT және OLCT-мен байланыстырған [58-67]. Алынған нәтижелер мұндай түрлендірулер екі түрлендірудің де артықшылықтарын пайдаланатынын, әрі әрқайсысының қасиеттері кеміп қалмайтынын көрсетті. Сондықтан осындай түрлендірулерге «гибридті түрлендірулер» деген жалпы атауды 2023 жылы «Кейбір жалпыланған Фурье түрлендірулерінің уақыт-жиілік талдауы» («Time Frequency Analysis of Some Generalized Fourier Transforms») кітабында бердік [68].

FT сигналды өңдеудегі фундаментальды құрал екені айқын. Дегенмен, FT өзінің кернелінің кесірінен сигналдың жергілікті қасиеттері туралы ақпаратты

ала алмайды. Бірақ сигналдар өмірде тұрақты емес немесе уақыт бойынша айнымалы, яғни тұрақсыз болатыны белгілі. Сондықтан бұл мәселені шешу үшін бір топ зерттеушілер қысқа мерзімді STFT қолдануды ұсынды. Кейін STFT орнына сигналды жақсырақ суреттейтін WT ұсынылды. WT-ның кемшілігі жоғары жиілікті аймақта оның жиілік ажыратымдылығы нашар. Бұл кемшілікті жою үшін STFT мен WT түрлендірулерінің артықшылықтарын біріктіру арқылы толқындық пакетті түрлендіру (WPT) ұсынылған болатын [69, 70]. Бірақ WPT энергиясы FT-де жақсы шоғырланбаған шиқылдау сигналдарымен (chirp signal, чирп сигнал) [71] жұмыс істеуде оңтайлы (оптималды) емес.

Сигналдардың біртұтас талдауын қарапайым және ақпараттық түрде қамтамасыз ететін квадраттық фазалық Фурье түрлендіруі (QPFT) деп аталатын FT-дің жалпыланған нұсқасын Кастро (Castro) және басқалары енгізген [72, 73]. 2019 жылы QPFT және WT-дің артықшылықтарын біріктіру мақсатында квадраттық фазалық Фурье вейвлет түрлендіруі (QPFWT) анықталды [74]. Дегенмен, QPFWT да кемшіліксіз болмады. Біріншіден, QPFWT QPFT-дің толық кернеліне сүйенбейді, екіншіден QPFWT QPFT-де бар конволюция құрылымын көрсете алмайды. Осылайша, осы екі кемшілікті жою мақсатында Шах және т.б. (Shah *et al.*) үздіксіз квадраттық фазалық вейвлет түрлендіруін (CQPWT) енгізді [75]. Концентрациядағы өнімділікті жақсарту үшін бөлшек толқындық пакетті түрлендіру (Fr-WPT) және сызықтық канондық толқындық пакетті түрлендіру (LC-WPT) енгізілді [76-78].

Сигналды өңдеу құралдарында кватернион алгебрасын пайдалану идеясы қазіргі таңда қарқынды дамуда. Оның бірден бір себебі қолдану аймағының кеңдігінде. Қазіргі таңда бірнеше түрлі кватернион түрлендірулер анықталған және олардың әртүрлі қасиеттері мен қолданыстары көрсетілген [79-90].

Зерттеудің мақсаты мен міндеттері. WVD-OLCT теориясы мен қолданысында біршама күрделілік бар. Мысалы: WVD-OLCT формуласы ауқымды болғандықтан компьютерге енгізгенде ыңғайсыз және уақыт жағынан тиімсіз, әрі теориялық есептеулер жүргізгенде күрделі. Осы күрделіліктерді жою мақсатында біз OLCT-ге негізделген WVD үшін жаңа тұжырымды енгізбекпіз, яғни Вигнер-Вилле үлестіріміндегі офсетті сызықтық канондық түрлендіруін (WOL) [68, 90, 91] құрастырмақпыз. WOL лездік автокорреляция функциясына өзгерту енгізбей құрастыру көзделген. WOL WVD-OLCT-ге қарағанда қарапайым уақыт жиілігін талдау құралы болады. Зерттеу жұмыстың міндетінің бірі жаңадан алынған түрлендірудің бірқатар негізгі қасиеттерін сипаттау, соның ішінде маргиналы және ауыспалы қасиеттер, Моял формуласы, анықталмағандық принципі және т.б. Сонымен қатар, лездік жиілікті есептеудің жаңа әдісін ұсыну; ұсынылған түрлендіруді сигналды қайта құру және анықтау үшін қолдану. Жалпы айтқанда, бұл зерттеу жұмысының негізгі мақсаттарының бірі компьютерге енгізілетін датаны азайту үшін есептеу құны төмен және қарапайым тұжырымы бар, бірақ классикалық WVD-ден, WVD-OLCT-ден қасиеттері мен қолданыстары жағынан кем болмайтын сигналды өңдеуге арналған гибриді құралды анықтау және оны жан-жақты зерттеу.

Біздің білуімізше, сигналдарды өңдеу теориясы мен қолданбалары үшін өнімді болатын квадраттық фазалық толқындық пакетті түрлендіру (QP-WPT) [90, 92] теориясы әлі күнге дейін қаралмаған. Осы жұмыстың тағы бір мақсаты WPT және QPFT негізінде құрастырылған QP-WPT теориясын терең зерттеу. Өзге түрлендірулер мен QP-WPT-дің қатынасын орнатуды және негізгі қасиеттері мен теоремаларды дәлелдеуді жоспарлап отырмыз. Сонымен қатар, QP-WPT-дің қолданысы ретінде сигналды QP-WPT арқылы қайта құруды көрсетпекпіз.

Ақпараттық жүйелерде, сигналдарды өңдеуде, коммуникацияда, және қолданбалы математикада кең қолданыстарға жол ашу мақсатында кватернион және ықтималдықтар теорияларын байланыстыра отыра кватернион Фурье түрлендіруінің (QFT) [79-84] кеңейтілуін зерттеу міндеттеріміздің бірі болып табылады.

Зерттеу нысаны ақпараттық жүйелер мамандығының зерттеу облыстарының бірі ақпаратты өңдеу болып табылады. Ақпарат болмаса, яғни ақпарат анықталмаса ақпаратты өңдей алмаймыз. Сондықтан ақпаратты өңдеудің ең бірінші қадамы ақпаратты тасымалдайтын сигналды анықтау керек екендігі сөзсіз. Диссертациялық жұмыста негізінен ақпаратты өңдеу мәселесінің алғашқы қадамы, яғни сигналды анықтауға және келген ақпаратты, яғни келген сигналды (входящий сигнал) қайта құру практикалық қолданысын жақсарту мақсатында класикалық құралдардың кемшілігінен құтылатын, артықшылығын арттыратын гибриді құралдарды құрастыру және осы құралдардың қолданыстары бар екендігін және қолданыстардың орындалатындығына күмән тумас үшін математикалық әдістермен нақты дәлелдеу, әрі MATLAB бағдарламасы арқылы симуляцияларды көрсету. Осы диссертациялық зерттеу жұмысындағы гибриді түрлендірулер WVD, OLCT, WPT және QPFT түрлендірулерінің негізінде құрастырылған [68, 91, 92]. Бұл түрлендірулердің фундаменти FT болып табылады. Диссертацияның жалпы нысаны жүйелерде қолданылатын сигналдарды өңдеу құралдарын біріктіру, екі түрлендірудің де артықшылықтарын пайдаланып, қолданыстарда жақсы нәтиже беретін, әрі есептеу күрделілігі аз жаңа гибриді түрлендірулерді құрастыру. Және де QFT-дің жалпы түрін зерттеу.

Зерттеу пәні ақпараттық жүйелерге байланысты сигналдарды өңдеу болып табылады. Сигналдарды өңдеу біршама уақыт бойы радиотехника мен байланыс теориясының пәні ғана болатын. Қазіргі уақытта сигналдарды өңдеу медициналық диагностика (компьютерлік томография, жүйке белсенділігі, жүрек соғуы, электроэнцефалограмма (ЭЭГ), электрокардиограмма (ЭКГ), т.б.), ғарыштық мониторинг (Жерді қашықтықтан зондтау деректерін өңдеу), фото және бейне (видео) түсіру (кескінді өңдеу), сейсмикалық қозғалыстар, ақпараттық қауіпсіздікті қамтамасыз ету сияқты әртүрлі салалардың зерттеу пәні болып табылады. Қысқаша айтқанда, сигналдарды өңдеу ақпараттық технологиялар, математика, оптика, инженерия, биомедицина, әскери салаларға ортақ пән.

Зерттеудің теориялық және әдістемелік негізі екі түрлі түрлендірудің теориясына сүйене отырып, оларды біріктіру арқылы әр түрлендірудің кемшілігінен құтылу, артықшылықтарын арттыру. Сонымен қатар, сигналды өңдеуде қолданылатын әмбебап құралдарды анықтау. Қасиеттерін сипаттау, әрі қолданыстарын көрсету.

Зерттеудің ақпараттық базасы. Біздің білуімізше, қазақ тілінде интернетте не баспа түрінде «сигналды өңдеу» зерттеу тақырыбы бойынша ақпараттар жоқтың қасы. Орыс тілінде аздаған жалпы ақпарат бар. Сол себепті осы жұмыста тек қана шетелдік ғылыми дереккөздердің деректері пайдаланылды. Осы диссертацияда көптеген түрлендірулердің атаулары, термин сөздер қазақ тіліне алғаш рет аударылды. Мысалы: «chirp signal» терминін «шиқылдау сигналы» деп тәржімаладық. «Chirp signal» терминінің транслитерациясын пайдаланып «чирп сигналы» деп аударуды жөн көрмедік, себебі ағылшын тілінен хабары жоқ қазақ тілді оқырманға терминнің мағынасы түсініксіз болады. Сондықтан да мағыналық аударма бергенді жөн санадық. «Chirp signal» деп аталуында себеп бар. Құстың қысқа, жоғары тонды дыбысын, яғни шиқылын ағылшын тілінде «chirp» дейді. Мысалы: The birds chirp in the morning. – Таңертең құстар шиқылдайды. Ағылшын тілді ғалымдар мен инженерлер жиілік өзгерісі құстың дауысына ұқсайтын сигналды «chirp signal» деп атайды. Сол себептен де «chirp signal» терминін «шиқылдау сигналы» деп тәржімаладық. Тіл маманы болмасақ та, терминдердің қазақша атаулары болмағандықтан терминдерді қазақ тіліне терең ойланып мағынасын жоғалтпай аударуға барымызды салдық. Бұл диссертация «сигналды өңдеу» зерттеу тақырыбында қазақ тілінде жазылған ең алғашқы материалдардың бірі. Сондықтан ғылыми қазақ тілінің дамуына үлес қостық деп сенеміз.

Диссертациялық зерттеудің ғылыми жаңалығы. Біріктірілген түрлендірулерді дамыту инновациялық және зерттеуге тұрарлық мәселе. Сигналдарды өңдеудің әдістерін зерттеу түрлендірулердің қолданыстары туралы көбірек түсінікке қол жеткізуге және бір пәннен алған білімді екінші пәнге тасымалдауға көмектеседі.

Бұл жұмыстың жаңа нәтижелері төменде көрсетілген:

- WOL деп аталатын WVD-OLCT-дің жаңа түрін анықтау;
- QR-WPT деп аталатын сигналды өңдейтін жаңа құралды құру;
- Бір өлшемді (1D) квартернион бөлшек Фурье түрлендіруін (QFrFT) [88, 89] енгізу;
- WOL және QR-WPT негізгі және маңызды қасиеттерін айқындау;
- FT және WFT мен QR-WPT арасындағы байланысты орнату;
- QR-WPT-мен байланысты анықталмағандық теңсіздіктерінің бірнеше түрлерін көрсету;
- WOL-дың қолданыстарын көрсету;
- MATLAB бағдарламасында қолданба жасау;
- QR-WPT арқылы сигналды қайта құру;
- Ықтималдық әдістерге, әсіресе стохастикалық процестерді модельдеу және талдауға арналған 1D QFrFT-дың қолданбаларын зерттеу.

Қорғауға ұсынылған диссертациялық зерттеудің негізі жүйелердегі сигналдарды өңдеу мәселелерін шешу үшін WOL, QP-WPT түрлендірулерін құру және олардың негізгі бірнеше қасиеттерін егжей-тегжейлі дәлелдеу. Негізгі қасиеттерді дәлелдеп көрсету өте маңызды, өйткені оларды түрлендірулердің қолданысын көрсетуде пайдаланамыз. Мысалы, WOL-дың сызықтық емес қасиеті LFM сигналдарын анықтауда қолданылады. LFM сигналдары ақпараттық байланыс, радар және сонар жүйелерінде пайдаланылады. Сондықтан LFM сигналдарын анықтау инженериядағы ең маңызды тақырыптардың бірі болып табылады. Біз бір және екі компонентті LFM сигналын анықтауда қарапайым WVD-OLCT қолданыстарын көрсеткіміз келеді.

Анықталмағандық принциптерінің сигналдарды өңдеудегі маңыздылығын ескерсек, осы диссертацияның тағы бір зерттеу негізі гибриді түрлендірулер үшін анықталмағандық принциптерін анықтау болып табылады.

Конвульсия (свертка) операциясы сигналды өңдеуде, жүйелерді талдауда, конвульсиялық нейронды желілерде (сверточные нейронные сети, convolutional neural network (CNN)), машиналық оқытуда (машинное обучение), спектрлік талдау, компьютерлік көруде (компьютерное зрение), т.б. салаларда қолданылатындықтан маңызды. Осы себептен де қорғауға ұсынылған диссертациялық зерттеудің негізінің бірі QFrFT үшін конвульсияны анықтау. Оған қоса QFrFT көмегімен ықтималдықтар теориясы мен сигналды өңдеу арасында көпір жасау.

Нәтижелердің теориялық маңызы. Осы диссертацияда алынған анықтамалар, қасиеттер, қолданыстар, қорытындылар мен ұсыныстар сигналдарды өңдеу теориясының бірқатар аспектілерін дамытады және толықтырады. Әрі әртүрлі жаңа қолданыстарды жүзеге асыру үшін идеяларды қалыптастыруға ықпал етеді.

Жұмыстың практикалық маңызы. Диссертациялық жұмыста қамтылған негізгі нәтижелер мен қорытындыларды әртүрлі сигналдарды өңдеу қолданбаларында, кескіндерді анықтауда, сондай-ақ, математика, оптика және техникадағы бірқатар мәселелерді шешуде қолдануға болады. MATLAB бағдарламасында жасалған қолданба бағдарламалық тілдерді білмейтін зерттеушілер/студенттер үшін арналған қолданба.

Зерттеу нәтижелерінің мақұлданыуы және апробациясы. WT-ға байланысты жасалған зерттеу нәтижелері Германияның ертеден келе жатырған танымал, әрі сенімді Elsevier баспасының «Оптик» («Optik») ғылыми журналынан рецензиядан сәтті өтіп, жарияланды [92]:

- 1) *Quadratic-phase wave packet transform*, Optik, 261: 2022. (22 рет сілтеме жасалған) WoS: Q2; Scopus: Engineering Q2, Rank 189/738, Percentile 77%. 10.1016/j.ijleo.2022.169120.

WVD, OLCT-ге қатысты жасалған зерттеу нәтижелерінің бір бөлігі Тайландта өткен «Модельдеу, симуляция және қолданбалы математика» («Modelling, Simulation and Applied Mathematics») атты бірнеше жыл қатарынан сәтті ұйымдастырылып жүрген, рецензияланатын халықаралық конференцияда

жарияланды және Springer Nature бөлімі Atlantis Press баспасының «Интеллектуалды жүйелерді зерттеудегі жетістіктер» («Advances in Intelligent Systems Research») атты серияларына енді [91]:

- 2) *The Wigner-Ville distribution based on the offset linear canonical transform domain*, Proceedings of the 2nd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM2017), 139–142, 2017 (11 рет сілтеме жасалған). 10.2991/msam-17.2017.31.

Бұдан бөлек, WVD мен OLCТ-ге жасалған зерттеу нәтижелерінің тағы бір ауқымды бөлігі «Кейбір жалпыланған Фурье түрлендірулерінің уақыт-жиілік талдауы» («Time Frequency Analysis of Some Generalized Fourier Transforms») атты кітаптың «Гибрид түрлендірулер» («Hybrid Transforms») атты тарауы болып 2023 жылы енді [68]:

- 3) Chapter: *Hybrid Transforms*. In book: Time Frequency Analysis of Some Generalized Fourier Transforms. IntechOpen; 2023. 10.5772/intechopen.108186.

Бұл кітап интернетте тегін, ашық түрде қолжетімді. Қағаз баспа түрінде 2023 жылдың соңында Лондон, Ұлыбритания және Солтүстік Ирландия Біріккен Патшалығындағы «IntechOpen» баспасынан басылып шықты. Кітап құны 100 евро, кез-келген жерден тапсырыс беріп, сатып алуға болады. Кітап DHL жеткізу сервисі арқылы көрсетілген мекен жайға тегін жеткізіледі.

2) мен 3)-ке қоса докторанттың ғылыми кеңесшісі, т.ғ.д., профессор И.Т. Утепбергеновпен дайындаған «Сызықтық-жиілікті-модуляцияланған сигналдарды Вигнер-Вилле үлестірімі және гибридті түрлендірулермен анықтау» атты мақаласы ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған басылымдар тізіміне кіретін «АУЭС Хабаршысы» журналына жіберілген болатын. Мақала бойынша мәліметті Қосымша А-дан көруге болады.

Сигналдарды өңдеу мен ықтималдық теориясын байланыстыру бойынша алынған нәтижелер «Математика» ғылыми журналынан рецензиядан сәтті өтіп, жарияланды [89]:

- 4) *Quaternion fractional Fourier transform: bridging signal processing and probability theory*, Mathematics, 13(2), 195, 2025. WoS: Q1, Rank 21/490, Percentile 97,45%; Scopus: Computer Science (miscellaneous) Q2, Rank 48/133, Percentile 64%. 10.3390/math13020195.

Гибридті және кватерниондық түрлендірулер бойынша нәтижелер монография ретінде сәтті жарияланды [90]:

- 5) *Кватернионные преобразования Фурье и их применение в задачах геофизики и геохимии*, Монография, Алматы:Everest, 2024. – 140 бет. ISBN 978-601-04-6809-2.

Монография қағаз баспа түрінде 2024 жылдың соңында Алматы «Everest» баспасынан басылып шықты. Монография Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің кітапханасында тіркелген (Қосымша Ә).

Диссертациялық зерттеудің нәтижелері Астана қаласында орналасқан ЖШС «UMAY R&D» өндірісінде сәтті енгізілді. Енгізу актысы бойынша мәліметті Қосымша Б-дан көруге болады.

Автордың жеке қосқан үлесі. Диссертация өзі жазу, ішкі бірлік, ғылыми жаңалық, дәйектілік, практикалық құндылық және академиялық адалдық принциптерін сақтай отырып орындалды. Автор өз бетінше сигналдарды өңдеу зерттеу саласындағы ғылыми мақалалар мен әдебиеттермен жете танысып, осы диссертацияға қажетті материалдарды жинады және зерттеді. Диссертациялық жұмыс тақырыбын қойды және мақсатқа жету үшін жұмыстың міндеттерін анықтады. Диссертацияның барлық бөлімдері логикалық түрде өзара байланысты; алынған нәтижелер мен ұсынымдар диссертацияда қойылған мақсаттар мен міндеттерге сәйкес. Автор ұсынған жаңа гибридті түрлендірулер, олардың қасиеттері мен қолданыстары дәлелденіп, бұрыннан белгілі түрлендірулермен байланыстары бағаланды. Осы жұмыстағы ғылыми нәтижелер мен қорытындылар жаңа және ақпараттық жүйелер ғылыми бағытының сигналдарды өңдеу саласындағы дамуы үшін маңызды, әрі ғылыми негізделген жаңа теориялық нәтижелерге ие. Сигналдарды зерттеу мен өңдеу бірнеше ғылым мен техниканың, атап айтқанда, оптика, математика, телекоммуникация, т.б., ортақ саласы болғандықтан диссертацияда алынған құралдар, қасиеттер, нәтижелердің маңыздылығы ауқымды. Диссертацияны жазу барысында автор басқа авторлардың құқықтары мен заңды мүдделерін сақтады. Диссертацияда пайдаланылған мәтінге және басқа тілден аударылған мәтіндерге, ойларға, қорытындыларға, зерттеу нәтижелеріне, суреттерге сілтеме жасалды, әрі автор өзінің жариялымдарына сілтеме жасаған. Диссертация нормативтік сілтемелер талаптарына сәйкес рәсімделді.

Автордың 1)-жарияланымы рецензияланатын журналда шыққан мақаланы жазудағы CRediT (Contributor Roles Taxonomy) авторлық үлесі туралы мәлімдеме: концептуализация (мақала идеясы авторға тиселі; автор жалпы зерттеу нысаны WT-ге негізделген жаңа түрлендіруді құрастыру және зерттеу мақсаттары QP-WPT-ді анықтау және оның қасиеттері мен қолданыстарын көрсетуді тұжырымдады), формальды талдау (зерттеу тақырыбын талдау үшін математикалық әдістерді қолдану арқылы автор QP-WPT-дің негізгі қасиеттерін дәлелдеді), жазу — мақала түпнұсқасын жазу (автор жарияланған жұмыстың бастапқы нобайын LaTeX жазу жүйесінде дайындады), жазу — шолу және өңдеу (журнал тағайындаған жасырын рецензенттердің сыни шолуларына автор түсініктеме жазуда және қолжазбаны жариялауға дейінгі кезеңде қайта қарауда атсалысты).

Автордың 2)-жарияланымы конференция мақаласын жазудағы CRediT авторлық үлесі туралы мәлімдеме: концептуализация (мақала идеясы авторға тиселі; автор зерттеу нысаны WVD мен OLCT-ді біріктіру арқылы ықшам гибридті түрлендіруді құрастыру және зерттеу мақсаттары оның негізгі қасиеттері мен қолданыстарын көрсетуді тұжырымдады), әдістеме (автор мақаланың құрылымын әзірлеп жобалады), формальды талдау (автор зерттеуді талдау үшін математикалық әдістерді қолданды), жазу — мақала түпнұсқасын жазу (автор жарияланған жұмыстың бастапқы нобайын жазып дайындады), жазу — шолу және өңдеу (редакция ұйымы тағайындаған жасырын

рецензенттердің сыни шолуларына автор түсініктеме жазды), қаржыландыру (конференцияға қатысу жарнасын автор қаржыландырды).

Автордың шетелдік ғылыми кеңесшісінің редакциялық басшылық етуімен жазылған кітаптың алты тараудың ішінде бір тарауын, яғни 3)-жарияланымды жазудағы CRediT авторлық үлесі туралы мәлімдеме: концептуализация (тарау идеясы авторға тиселі; автор гибридті түрлендірудің зерттеу нысаны мен мақсаттарын тұжырымдады), әдістеме (автор тараудың құрылымын әзірлеп жобалады), формальды талдау (автор зерттеуді талдау үшін интегралдық теңдеулерді шешудің математикалық әдістерін қолданды), тергеу (гибридті түрлендірудің қасиеттерін және теориялық қолданысының дәлелдерін көрсетті), жазу — тарау түпнұсқасын жазу (автор жарияланған жұмыстың бастапқы және соңғы түпнұсқасын талаптарға сай әзірлеп жазды), жазу — шолу және өңдеу (жариялауға дейінгі және кейінгі кезеңдерді қоса алғанда жасырын рецензенттердің сыни шолуларына автор түсініктеме жазды, шолуларға сәйкес түзетулерді жүргізді), қаржыландыру (тарау Қосымша В-да көрсетілген *«Кватерниондық Фурье түрлендірулерін құру мен зерттеу және оларды геофизика мен геохимия мәселелерін шешу үшін ақпараттық жүйесін құруда қолдану»* атты жоба аясында Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігінің Ғылым Комитеті, жоба ЖСН №AP14871252, қаржыландырылды).

Автордың 4)-жарияланымды рецензияланатын журналда шыққан мақаланы жазудағы CRediT авторлық үлесі туралы мәлімдеме: жазу — шолу және өңдеу (журнал тағайындаған жасырын үш рецензенттердің сыни шолуларына автор толық түсініктеме жазуда және қолжазбаны жариялауға дейінгі кезеңде қайта қарауда және өңдеуде атсалысты, кватернион сигналдарды өңдеу әдістерін ықтималдықтар теориясының мәселелерін шешуге байланысты шолуларға жауап дайындап, қолжазбаға сәйкес түзетулер мен толықтырулар енгізді), қаржыландыру (*«Кватерниондық Фурье түрлендірулерін құру мен зерттеу және оларды геофизика мен геохимия мәселелерін шешу үшін ақпараттық жүйесін құруда қолдану»* атты жоба аясында ҚР Білім және Ғылым министрлігінің Ғылым Комитеті, жоба ЖСН №AP14871252, қаржыландырылды).

Автордың жоба жетекшісінің редакциялық басшылық етуімен жазылған монографиясын, яғни 5)-жарияланымды жазудағы авторлық үлесі туралы мәлімдеме: концептуализация (монография идеясының ауқымды бір бөлігін, яғни кватерниондық Фурье түрлендірулері арқылы ақпараттық жүйелерді қолданып, геохимия мен геофизика есептерін шығарудағы идея авторға тиселі; автор кватерниондық Фурье түрлендірулерін сигналдарды, кескіндерді өңдеу және геофизикалық модельдеу есептерін шығаруда атсалысты), әдістеме (автор монографияның құрылымын әзірлеп жобалады), формальды талдау (автор сигналдарды өңдеу, геофизика, геоақпараттық жүйелер және қолданбалы математика саласындағы зерттеулерді қолданды), тергеу (гибридті түрлендірулерге ерекше көңіл бөлді, олар арқылы әртүрлі әдістердің артықшылықтарын біріктірді, деректерді өңдеу дәлдігін арттырды), жазу —

монографияның түпнұсқасын жазу (автор монографияның түпнұсқаларын талаптарға сай әзірлеп жазуға қатысты), жазу — шолу және өңдеу (жариялауға дейінгі және кейінгі кезеңдерді қоса алғанда рецензенттердің сыни шолуларына сәйкес түзетулерді жүргізді), қаржыландыру («Кватерниондық Фурье түрлендірулерін құру мен зерттеу және оларды геофизика мен геохимия мәселелерін шешу үшін ақпараттық жүйесін құруда қолдану» атты жоба аясында ҚР Білім және Ғылым министрлігінің Ғылым Комитеті, жоба ЖСН №АР14871252, қаржыландырылды).

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша жалпы көлемі 11,75 баспа парағын құрайтын 5 ғылыми жұмыс [68, 89-92] жарияланды. Атап айтқанда:

- 1) 1 мақала Journal Citation Reports деректері бойынша импакт-факторы 3.1-ге тең, Clarivate Analytics компаниясының Web of Science Core Collection Science Citation Index Expanded (SCIE) деректер базасында және Scopus деректер базасында индекстелетін CiteScore 6.9-ге тең халықаралық рецензияланатын ғылыми журналда,
- 2) 1 мақала Clarivate Analytics компаниясының Web of Science Core Collection Conference Proceedings Citation Index (CPCI) деректер базасында және China National Knowledge Infrastructure (CNKI) деректер базасында индекстелетін халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция материалында,
- 3) Clarivate Analytics компаниясының Web of Science Core Collection Book Citation Index, Directory of Open Access Books (DOAB), China National Knowledge Infrastructure (CNKI), Crossref (DOI), Zentralblatt MATH (zbMATH), және т.б. халықаралық ғылыми кітаптардың деректер базасына енгізілген кітаптың бір тарауы ретінде жарияланды,
- 4) 1 мақала Journal Citation Reports деректері бойынша импакт-факторы 2.3-ке тең, Clarivate Analytics компаниясының Web of Science Core Collection Science Citation Index Expanded (SCIE) деректер базасында және Scopus деректер базасында индекстелетін CiteScore 4.0-ға тең халықаралық рецензияланатын ғылыми журналда,
- 5) Алматы қаласының Everest баспасынан шыққан, Монография ретінде жарияланды.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы және көлемі. Диссертациялық жұмыс қазақ тілінде жазылған, кіріспеден, бөлімшелерге бөлінген (20 параграфы бар) өзара байланысты бес бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және төрт қосымшадан тұрады. Диссертациялық жұмыс 107 бетте жазылған. Жұмыс тоғыз кестемен, отыз суретпен суреттелген. Пайдаланылған әдебиеттер тізімі 156 әдебиеттен тұрады.

Бұл диссертация бес бөлімнен тұрады және ол төмендегідей құрылымдалған:

1-бөлім осы зерттеу жұмысына қажетті анықтамалар мен қасиеттерді беретін шолу сипатында жазылған. Сонымен қатар, осы бөлімде сигналдарды өңдеу құралдары бойынша бұрынғы зерттеулер мен жұмыстар баяндалған.

2-бөлімде OLCT-дегі WVD-дің жаңа анықтамасы, атап айтқанда WOL түрлендіруі анықталған. WOL-дың негізгі қасиеттері, оның ішінде анықталмағандық принципі дәлелденген және лездік жиілікті есептеудің жаңа әдісі ұсынылған.

3-бөлімде WPT және QPFT негізінде QP-WPT құрастырылған, оның WFT-мен байланысы берілген. Маргинал, Моял формуласы және репродуктивті кернел сияқты QP-WPT-дың бірнеше маңызды қасиеттері анықталған. Лейбтің анықталмағандық принципі, логарифмдік анықталмағандық теңсіздігі және Гейзенберг анықталмағандық теңсіздігі сияқты анықталмағандық теңсіздіктерінің бірнеше түрлері көрсетілген.

4-бөлімде WOL-дың LFM сигналын анықтауда және қайта құруда қолданысы көрсетілген. Сонымен қатар, QP-WPT арқылы сигналды қайта құруға болатындығы дәлелденген.

5-бөлімде QFrFT-нің конвульсиясы берілген және ықтималдықтар теориясы мен сигналды өңдеу салалары байланыстырылған.

Соңында осы зерттеу жұмысы қорытындыланған және зерттеудің әлеуеті (потенциалы) және болашақтағы қолданысы талқыланған.

1 ЗЕРТТЕУ МӘЛІМЕТТЕРІ

Бұл бөлімде Фурье түрлендіруі (FT) және оның кемшіліктері, классикалық Вигнер-Вилле үлестірімі (WVD), канондық түрлендірулердің анықтамалары мен қасиеттері қарастырылады. Әрі қарай, келесі бөлімдерде қажет болатын үздіксіз вейвлет түрлендіруі (CWT), толқындық пакетті түрлендіру (WPT), квадраттық фазалық Фурье түрлендіруі (QPFT), үздіксіз квадраттық фазалық вейвлет түрлендіру (CQPWT) теорияларын қысқаша баяндаймыз. Соңында, алдыңғы зерттеу нәтижелерін қарастырамыз. Қысқаша айтқанда, бұл бөлім зерттеу жұмысында қолданылған түрлендірулерге шолу жасайды.

1.1 Фурье түрлендіруі (FT)

FT сигналдарды екі түрлі облыс арасында түрлендіруге көмектеседі, яғни сигналдарды жиілік облысынан уақыт облысына немесе керісінше түрлендіреді.

Анықтама 1.1.1 (FT). $f(t)$ сигналының FT-і деп $f(t)$ – мен төмендегі формула арқылы байланысатын $\mathcal{F}_f$ функциясын айтады [1-4]

$$\mathcal{F}_f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-iut} dt. \quad (1.1)$$

Анықтама 1.1.2 (WFT). $f(t)$ сигналының ϕ терезе функциясына катысты $\mathcal{G}_\phi$ терезелік Фурье түрлендіруі (WFT) төмендегідей анықталады [93]

$$\mathcal{G}_\phi\{f\}(\xi, \beta) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi^*(t - \beta) e^{-i\xi t} dt, \quad (1.2)$$

және $f(t)$ сигналының айналдыруы (inversion, инверсия) былай өрнектеледі [18]

$$f(t) = \frac{b}{2\pi(\phi, \psi)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_\phi\{f\}(\xi, \beta) e^{i\xi t} \psi(t - \beta) d\xi d\beta, \quad (1.3)$$

мұндағы $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

FT анықталғалы ол математика мен техниканың көптеген салаларында, соның ішінде кванттық механикада, толқындардың таралуын зерттеуде, турбуленттілік, сигналдарды талдау және өңдеуде кең қолданыс тапты. Керемет табыстарға қарамастан, FT төмендегі себептерге байланысты кейбір мәселелерді зерттеу үшін жеткіліксіз:

- FT талдауында жергілікті ақпарат жоқ, өйткені ол уақыт бойынша жиіліктің өзгеруін көрсетпейді;
- FT талдауы тек қана уақыт немесе жиілік облысындағы мәселелерді

зерттейді, бірақ бір уақытта екі облысты зерттей алмайды.

Бұдан, FT талдауы уақыт бойынша өзгермейтін сигналдарды зерттеу үшін жеткілікті екенін көреміз, ал мұндай сигналдар тұрақты (стационар) сигналдар деп аталады. Күнделікті сигналдар: аудио, бейне, радар, биомедициналық және т.б. сигналдардың барлығы тұрақты емес (стационар емес) сигналдар. Мұндай сигналдарға толық талдау жасау үшін FT жеткіліксіз, өйткені толық талдау сигналдың уақыт-жиілік облыстарын талдауды талап етеді. Сондықтан да уақыт пен жиілік облыстарына қатар, яғни бір мезетте талдау жасай алатын түрлендіруді анықтау қажеттілігі туындайды.

1.2 Вигнер-Вилле үлестірімі (WVD)

1963 жылғы физика бойынша Нобель сыйлығының лауреаты Евгений Пол Вигнер (Eugene Paul Wigner) 1932 жылы алғаш рет классикалық статистикалық механиканың кванттық түзетулерін зерттеу үшін іргелі (fundamental) сызықтық емес түрлендіруді енгізді [94]

$$\mathcal{W}_{\psi}(x, p) = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(x - \frac{\tau}{2}\right) \overline{\psi}\left(x + \frac{\tau}{2}\right) \exp\left(\frac{ip\tau}{h}\right) d\tau, \quad (1.4)$$

мұндағы $\psi(x)$ – бір өлшемді Шрёдингер (Schrödinger) теңдеуін қанағаттандыратын толқын функциясы;

x – кванттық механикалық позиция;

p – серпін (импульс, momentum) тәуелсіз айнымалылар;

$h = 2\pi\hbar$ Планк тұрақтысы.

Вигнер үлестірімінің (түрлендіруінің) ең керемет қасиеттері мынадай [38]:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\psi}(x, p) dx &= |\varphi(p)|^2, \\ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\psi}(x, p) dp &= |\psi(x)|^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

және (x, p) кеңістігіндегі $\mathcal{W}$ толқын функциясының жалпы энергиясы

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_{\psi}(x, p) dx dp = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|. \quad (1.6)$$

1948 жылы Жан-Андре Вилле (Jean-Andre Ville) тұрақты емес сигналды зерттеу кезінде, (1.4) теңдеуде берілген Вигнер үлестірімін сигналдың жергілікті (local, локальный) уақыт-жиілік энергиясының квадраттық көрінісі ретінде қарастырып, Вигнер үлестірімін дербес түрде қайта шығарды [95]. Содан ол WVD немесе Вигнер-Вилле түрлендіруі (WVT) деп аталынып кетті. WVD Габор түрлендіруі (Gabor transform) [96], Зак түрлендіруі (Zak transform) [97, 98], қысқа мерзімді Фурье түрлендіруі (STFT) [50] және осылар сияқты

сигналдың сызықтық уақыт-жиілік түрлендірулері арасында басты орынды алады және ол уақыт бойынша өзгеретін сигналдар мен тұрақты емес кездейсоқ процестердің уақыт пен жиілігін талдайтын құнды әдіс/құрал ретінде танылды. Құрылымы мен қасиеттерінің әсерінен WVD басты уақыт-жиілік үлестірімі ретінде қарастырылады, физика мен техниканың әртүрлі салаларында классикалық және іргелі уақыт-жиілік талдау құралы ретінде пайдаланылады. Атап айтқанда, WVD лезде жиілікті бағалау, кездейсоқ сигналдардың спектрлік талдауы, анықтау және жіктеу, компьютерде жүзеге асыру алгоритмдері (algorithms for computer implementation, алгоритмы компьютерной реализации) үшін қолданылған және көру (vision), кристалдардың рентгендік дифракциясы, үлгіні тану (pattern recognition, распознавания образов), радар және сонарда кең ауқымды қолданбаларға ие. Осыған қоса, сейсмикалық деректерді (seismic data), сөйлеуді және дыбыстық инженерия мәселелерінде фазалық бұрмалауларды (фазовые искажения) талдау үшін де қолданылды.

Анықтама 1.2.1 (Айқас WVD). $L^2(\mathbb{R})$ Гильберт кеңістігінде жататын f және g сигналдарының $\mathcal{W}_{f,g}$ айқас WVD-і былай анықталады [40, 42, 99]

$$\mathcal{W}_{f,g}(t,u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i u \tau} d\tau. \quad (1.7)$$

Анықтама 1.2.2 (Авто WVD). (1.7) тендеуінде $f = g$ болған жағдайда, $\mathcal{W}_{f,g}(t,u) = \mathcal{W}_{f,f}(t,u)$ болады және ол $\mathcal{W}_{f,f}$ авто WVD деп анықталады [40, 42, 99]

$$\mathcal{W}_{f,f}(t,u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i u \tau} d\tau. \quad (1.8)$$

Жалпы түрде авто WVD қарастырылады, оны қысқаша WVD деп қана атаймыз және $\mathcal{W}_f$ деп белгілейміз. WVD анықтамасынан WVD $R_f(t, \tau)$ лездік автокорреляция функциясының

$$R_f(t, \tau) = f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} \quad (1.9)$$

τ –ға қатысты FT екені айқын. Демек, $\mathcal{W}_f(t,u)$ уақыт-жиілік жазықтығындағы күрделі мәнді функция. Басқа сөздермен айтқанда

$$\mathcal{W}_f(t,u) = \mathcal{F}\{(R_f(t, \tau))\}. \quad (1.10)$$

WVD-дың кейбір негізгі қасиеттері 1-кестеде жинақталған. WVD-ге

қатысты кейбір соңғы жұмыстар мен зерттеулер [36-42, 53-67] әдебиеттерінде және осы әдебиеттердегі сілтемелерде баяндалған.

Кесте 1 – WVD қасиеттері

Қасиет атауы	Формуласы
Түйіндес симметрия	$\mathcal{W}_f(t, u) = \overline{\mathcal{W}_f(t, u)}$
Уақыт маргиналы (marginal, краевой)	$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_f(t, u) du = f(t) ^2$
Жиілік маргиналы	$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_f(t, u) dt = \hat{f}(u) ^2$
Уақыт ауысуы (аударуы)	$f'(t) = f(t - \lambda), \mathcal{W}_{f'}(t, u) = \mathcal{W}_f(t - \lambda, u)$
Жиілік ауысуы (модуляциясы)	$f'(t) = f(t)e^{iu_0 t}, \mathcal{W}_{f'}(t, u) = \mathcal{W}_f(t, u - u_0)$
Моял формуласы	$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f(t, u) \overline{\mathcal{W}_g(t, u)} dt du = \left \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt \right ^2 = \langle f, g \rangle ^2$
Энергия үлестірімі (Energy distribution, Распределение энергии)	$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f(t, u) dt du = \int_{\mathbb{R}} f(t) ^2 dt = \langle f(t), f(t) \rangle$
Ескерту – Кестені автор [36-42, 53-67] дереккөздері бойынша құрастырған.	

1.3 Канондық түрлендірулер

Осы параграфта канондық түрлендірулердің екі түрін: сызықтық канондық түрлендіру (LCT) және офсетті сызықтық канондық түрлендіруді (OLCT) қарастырамыз.

1.3.1 Сызықтық канондық түрлендіру (LCT)

1970-ші жылдары Коллинз (Collins) [100], Мошинский және Кюесне (Moshinsky and Quesne) [15] (a, b, c, d) төрт параметрі бар интегралдық түрлендіру ретінде LCT-ді енгізді және LCT дифференциалдық теңдеулерді шешу және оптикалық жүйелерді талдау үшін қолданылды. LCT-ге жүргізілген терең зерттеулер нәтижесінде, әсіресе 2005 жылы Хеннелли мен Шеридан (Hennelly and Sheridan) дискретті LCT-ді есептеудің жылдам алгоритмін [101] ұсынғаннан кейін, LCT тұрақты емес сигналдарды өңдеу үшін кеңінен қолданыла бастады. LCT икемді құрал ретінде сигналдарды өңдеу, радар/сонар жүйесін талдау, сүзгі дизайны (filter design), цифрлық су таңбалау (watermarking, водяной знак), фазаларды қайта құру (phase retrieval, восстановление фазы), үлгіні тану, сигнал синтезі және инженерлік ғылымдардың көптеген басқа

салаларын қоса алғанда, бірнеше басқа да ғылыми салаларда кеңінен қолданылды. LCT-дің көптеген қасиеттері жақсы зерттелген. FT, бөлшектік Фурье түрлендіруі (FrFT), Фреснель түрлендіруі [102], Лаплас түрлендіруі, бөлшектік Лаплас түрлендіруі, уақытты масштабтау және шиқылдау операциялары сияқты операциялар LCT-дің ерекше жағдайлары болып табылады.

Кейбір жұмыстарда LCT Коллинз формуласы, квадраттық-фазалық интегралдық немесе квадраттық-фазалық жүйе, жалпыланған Гюйгенс интегралы (generalized Huygens integral) [103], ABCD түрлендіруі [104], жалпыланған Фреснель түрлендіруі [105], кеңейтілген бөлшек Фурье түрлендіруі, Мошинский және Кюесне интегралы немесе аффиндік Фурье түрлендіруі, т.б. әртүрлі атаулармен белгілі.

LCT – уақыт-жиілік облысын сызықтық канондық түрлендіру облысына дейін танымал ететін біртұтас уақыт-жиілікті талдау әдістерінің бірегейі.

Анықтама 1.3.1.1 (LCT). $A = (a, b, c, d)$ параметр матрицасы үшін, $f(t)$ сигналының $\mathcal{L}_A$ LCT-і төмендегідей анықталады [8, 106, 107]

$$\mathcal{L}_A \{ f(t) \} (u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sqrt{\frac{1}{i2\pi b}} e^{i\left(\frac{a}{2b}t^2 - \frac{1}{b}ut + \frac{d}{2b}u^2\right)} dt, & b \neq 0, \\ \sqrt{d} e^{i\frac{cd}{2}u^2} f(du), & b = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

мұндағы $\sqrt{\frac{1}{i2\pi b}} e^{i\left(\frac{a}{2b}t^2 - \frac{1}{b}ut + \frac{d}{2b}u^2\right)} = K_A(t, u)$ – LCT кернелі (кей орыс әдебиеттерінде кернел «ядро» деп аталады);

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ нақты сандар және A матрицасының параметрлері, $ad - bc = 1$, яғни $\det(A) = 1$.

LCT анықтамасынан параметр $b = 0$ болғанда, LCT амплитудалық және квадраттық фазалық модуляциямен біріктірілген масштабтау түрлендіруі болып табылатынын және ол біздің нысанымыз (объектіміз) емес екенін көреміз. Сондықтан бұл диссертацияда $b \neq 0$, әрі $b > 0$ жағдайын қарастырамыз. LCT туралы толық және жан-жақты ақпаратты [8] және сондағы сілтемелерден табуға болады.

1.3.2 Офсетті сызықтық канондық түрлендіру (OLCT)

OLCT алты параметрлі $(a, b, c, d, u_0, \omega_0)$ интегралдық түрлендіру болып табылады және қолданбалы математикада, сигналдарды өңдеуде, оптикада икемді құрал ретінде мол назарға ие. OLCT LCT-дің уақыт бойынша ауысқан (аударылған) және жиілік бойынша ауысқан (модуляцияланған) нұсқасы. Кей ғылыми еңбектерде OLCT арнайы аффиндік Фурье түрлендіруі [26, 108, 109] және біртекті емес канондық түрлендіру деп аталған.

Анықтама 1.3.2.1 (OLCT). $\mathbf{A} = (a, b, c, d, u_0, \omega_0)$ параметр матрицасы үшін, $f(t)$ сигналының $\mathcal{O}_A$ OLCT-і төмендегідей анықталады [27, 29, 30]

$$\mathcal{O}_A \{ f(t) \} (u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(t) K_A(t, u) dt, & b \neq 0, \\ \sqrt{d} e^{i \left(\frac{cd}{2} (u-u_0)^2 + \omega_0 u \right)} f(d(u-u_0)), & b = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

мұндағы $K_A(t, u)$ – OLCT кернелі

$$K_A(t, u) = \frac{1}{\sqrt{i2\pi b}} e^{i \left(\frac{a}{2b} t^2 - \frac{1}{b} t(u-u_0) + \frac{d}{2b} (u^2 + u_0^2) - \frac{u}{b} (du_0 - b\omega_0) \right)}, \quad (1.13)$$

және $a, b, c, d, u_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$ $\mathbf{A}$ матрицасының параметрлері, $\det(\mathbf{A}) = 1$.

(1.12) теңдеуінен $b = 0$ болғанда, OLCT жай ғана сызықтық шикылдауға (chirp) көбейтілген уақыт масштабындағы f сигналының нұсқасы екенін көруге болады. Сондықтан бұл диссертацияда $b \neq 0$ жағдайын қарастырамыз және $b > 0$ деп аламыз.

Сигналдарды өңдеуде және оптикада пайдаланылатын бірқатар белгілі классикалық түрлендірулер мен математикалық операциялар OLCT-дің ерекше жағдайлары болып табылады. $\mathbf{A}$ матрицасы әртүрлі параметрлерді қабылдағанда OLCT-дің ерекше жағдайлары туындайды. Мысалы, OLCT $\mathbf{A} = (a, b, c, d, u_0, \omega_0) = (a, b, c, d, 0, 0)$ параметрлерімен LCT-ге айналады; ал $\mathbf{A} = (\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta, \cos \theta, 0, 0)$ болғанда, OLCT FrFT-ге айналады; $\mathbf{A} = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$ болғанда, OLCT FT болады; $\mathbf{A} = (1, b, 0, 1, 0, 0)$ болғанда, Френсель түрлендіруі болады; және $\mathbf{A} = (d^{-1}, 0, 0, d, 0, 0)$ болғанда, OLCT уақытты масштабтау операциясына айналады. Гаусс немесе шикылдау функциясына көбейту $\mathbf{A} = (1, 0, \tau, 1, 0, 0)$ болғанда айналады [26]. Офсетті Фурье түрлендіруі [110], офсетті бөлшек Фурье түрлендіруі [110], Хартлей түрлендіруі (Hartley transform) [111], жиілік модуляциясы және уақыт ауысуы операциялары да OLCT-дің ерекше жағдайлары. OLCT теориясын терең зерттеу оның ерекше жағдайларын тереңірек түсінуге көмектеседі. 2-кестеде біз OLCT-тің кейбір ерекше жағдайларын тізіп жаздық. Бұл қатынастарды (1.12) теңдеуіндегі $\mathbf{A}$ параметрлерін ауыстыру арқылы оңай тексеруге болады. OLCT қасиеттері мен қолданыстары туралы толығырақ [26-30, 108, 109]-те баяндалған.

Кесте 2 – OLCT ерекше жағдайлары

Түрлендіру	$\mathbf{A} = (a, b, c, d, u_0, \omega_0)$, $b \neq 0$ параметрлері
Сызықтық канондық түрлендіру (LCT)	$\mathbf{A} = (a, b, c, d, 0, 0)$
Фурье түрлендіруі (FT)	$\mathbf{A} = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$
Бөлшек Фурье түрлендіруі (FrFT)	$\mathbf{A} = (\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta, \cos \theta, 0, 0)$
Офсетті бөлшек Фурье түрлендіруі	$\mathbf{A} = (\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta, \cos \theta, u_0, \omega_0)$
Фреснель түрлендіруі	$\mathbf{A} = (1, b, 0, 1, 0, 0)$
Уақытты масштабтау (Time scaling, Масштабирование времени)	$\mathbf{A} = (d^{-1}, 0, 0, d, 0, 0)$
Уақыт ауысуы	$\mathbf{A} = (1, 0, 0, 1, u_0, 0)$
Жиілік модуляциясы	$\mathbf{A} = (1, 0, 0, 1, 0, \omega_0)$
Шиқылдау (chirp, чирп) операциясы	$\mathbf{A} = (1, 0, \tau, 1, 0, 0)$
Лаплас түрлендіруі	$\mathbf{A} = (0, i, i, 0, 0, 0)$
Бөлшек Лаплас түрлендіруі	$\mathbf{A} = (i \cos \theta, i \sin \theta, i \sin \theta, -i \cos \theta, 0, 0)$
Ескерту – Кестені автор [26-30, 108, 109] дереккөздері бойынша құрастырған.	

Шындығында, FT, FrFT және LCT офсетті нұсқалары классикалық FT, FrFT және LCT-ге ұқсас, бірақ олардың артық офсетті параметрлері бар болғандықтан классикалық нұсқаларға қарағанда икемді. Және де жоғарыда аталған түрлендірулердің формулалары ұқсас болғанымен, олардың нәтижелері мен қолданыстары бірдей емес. Мысалы, призмалары немесе жылжымалы линзалары бар оптикалық жүйелерді FT немесе LCT арқылы талдау мүмкін емес, себебі бұл түрлендірулерде уақыт ауысуына және жиілік модуляциясына сәйкес келетін параметрлер жоқ. Сондықтан мұндай мәселелер бізді көбірек параметрлері бар түрлендіруді зерттеуге итермелейді. Офсетті параметр кіріс сигналын жылжытуға мүмкіндік береді, бұл кескінді тіркеу (image registration, регистрация изображений) және нысанды бақылау (object tracking, отслеживание объектов) сияқты сигналды өңдеу қолданбалары үшін пайдалы. FT және LCT сияқты түрлендірулермен салыстырғанда, OLCT бірнеше артықшылықтарға ие. Біріншіден, OLCT ауысым-инвариантты болып табылады, яғни кіріс сигналының ауысуы түрлендіру коэффициенттерін өзгертпейді. Бұл OLCT-ді кіріс сигналындағы шу (noise, шум) мен бұрмалануларға (distortions, искажения) төзімдірек етеді. Екіншіден, OLCT FT немесе LCT-ге қарағанда сигналды өңдеу қолданбаларында көбірек икемділікті қамтамасыз етеді,

өйткені офсетті параметр кіріс сигналының фазасы мен орнын реттеу үшін пайдаланылады. Бұдан FT және LCT-дің бірегей артықшылықтары мен қолданбалары болғанымен, OLCT сигналдарды өңдеу мәселелерінің кең ауқымын шешуге арналған икемді, әрі жалпы құрал екенін көреміз.

1.4 Үздіксіз вейвлет түрлендіруі (CWT)

Вейвлет түрлендіруі (WT) STFT-дің баламасы (альтернативасы). WT жиілік бойынша өзгеретін уақыт-жиілік терезесін пайдаланып, өзгермелі детальдың ажыратымдылығын (рұқсаттық, resolution, разрешение) тиімді түрде қамтамасыз етеді.

Анықтама 1.4.1 (CWT). $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ сигналының CWT_f CWT-і төмендегідей анықталады [51, 99]

$$CWT_f(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)} dt, \quad (1.14)$$

мұндағы α – масштабтау (scaling) параметрі және $\alpha > 0$;

β – трансляция параметрі;

t – уақыт;

$\psi(t)$ – ана вейвлет деп аталатын түрлендіру функциясы (transforming function, преобразующая функция) болып табылады және $\psi(t)$ нормаланған функция, яғни $L^2(\mathbb{R})$ кеңістігінде $\|\psi\| = 1$.

1.5 Толқындық пакетті түрлендіру (WPT)

WPT STFT және CWT элементтерін біріктіреді.

Анықтама 1.5.1 (WPT). WPT_f WPT — α арқылы кеңейтілген (dilated, расширенный) және β арқылы трансляцияланған (translated, переведённый) вейвлетпен терезеленген сигналдың FT-і [112, 113]

$$WPT_f(u, \beta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t-\beta)} e^{-iut} dt, \quad (1.15)$$

мұндағы $\psi_{\alpha}(t-\beta) = \psi\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)$.

Лемма 1.5.1 [77]. Егер $\psi \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$ болса, онда

$$\|\psi_{\alpha}(t-\beta)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \alpha^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

1.6 Квадраттық фазалық Фурье түрлендіруі (QPFT)

Бұл параграфта классикалық интегралдық түрлендірулер арасында жаңа болып табылатын QPFT-ге шолу жасаймыз, және оның айналдыру формуласын және әдебиетте бұрыннан бар кейбір нәтижелерін береміз.

Анықтама 1.6.1 (QPFT). Берілген параметр $\mathbf{A} = (a, b, c, d, e)$ болатын кез-келген $f(t)$ сигналының $\mathcal{Q}_\mathbf{A}$ QPFT-і төмендегідей анықталады [74]

$$\mathcal{Q}_\mathbf{A} \{ f(t) \} (u) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K_\mathbf{A}(t, u) dt, \quad (1.16)$$

мұндағы $K_\mathbf{A}(t, u)$ – квадраттық фазалық Фурье кернелі

$$K_\mathbf{A}(t, u) = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{(at^2 + btu + cu + dt + eu)}, \quad (1.17)$$

мұндағы $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

QPFT-тың айналдыру формуласы [74]

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{Q}_\mathbf{A}(u) \overline{K_\mathbf{A}(t, u)} du. \quad (1.18)$$

Айналдыру формуласын пайдаланып, Парсевал (Parseval) қатынасын алуға болады [74]

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{Q}_\mathbf{A} \{ f(t) \}, \mathcal{Q}_\mathbf{A} \{ g(t) \} \rangle \quad (1.19)$$

және Парсевал теоремасының жалпы түрі Планчерель (Plancherel) теоремасы

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{Q}_\mathbf{A} \{ f(t) \} (u)|^2 du = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \quad (1.20)$$

Осы соңғы теңдеуді кей әдебиеттерде жалпыланған Рэйлей (Rayleigh) формуласы деп те атайды.

3-кестеде QPFT-дің кей қасиеттерін бердік. Кестедегі $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ және $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.7 Үздіксіз квадраттық фазалық вейвлет түрлендіру (CQPWT)

CQPWT классикалық CWT, үздіксіз бөлшек вейвлет түрлендіру, сондай-ақ, сызықтық канондық вейвлет түрлендірудің жалпылауы болып табылады.

Анықтама 1.7.1 (CQPWT). $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ вейвлетіне және $\mathbf{A} = (a, b, c, d, e)$ параметріне қатысты $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ сигналының $CQPWT_f$ CQPWT төмендегідей анықталады [74]

$$\mathcal{Q}PW T_f(\beta, \alpha) = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{\beta, \alpha}^A(t)} dt, \quad (1.21)$$

мұндағы $\psi_{\beta, \alpha}^A(t)$ отбасы квадраттық фазалық вейвлет (QPW) деп аталады және былай өрнектеледі

$$\psi_{\beta, \alpha}^A(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \psi\left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right) e^{-i\alpha(t^2 - \beta^2) - i\alpha(t - \beta)}. \quad (1.22)$$

Лемма 1.7.1 [74]. Егер $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ болса, онда $\psi_{\beta, \alpha}^A(t) \in L^2(\mathbb{R})$ және $\|\psi_{\beta, \alpha}^A\|^2 = \|\psi\|^2$.

Кесте 3 – QPFT қасиеттері

Қасиет атауы	Формуласы
Түйіндес	$\mathcal{Q}_A \{ \overline{f(t)} \}(u) = \overline{\mathcal{Q}_A \{ f(t) \}(u)}$
Сызықтық	$\mathcal{Q}_A \{ \alpha f(t) + \beta g(t) \}(u) = \alpha \mathcal{Q}_A \{ f(t) \}(u) + \beta \mathcal{Q}_A \{ g(t) \}(u)$
Уақыт ауысуы (аударуы)	$\mathcal{Q}_A \{ f(t - \tau) \}(u) = e^{-i(a\tau^2 + b\tau u + d\tau)} \mathcal{Q}_A \{ e^{-2ia\tau t} f(t) \}(u)$
Жиілік ауысуы (модуляциясы)	$\mathcal{Q}_A \{ e^{iat} f(t) \}(u) = e^{i(\alpha^2 + 2\alpha bu + \alpha eb)\frac{1}{b}} \mathcal{Q}_A \{ f(t) \}\left(u + \frac{a}{b}\right)$
Ескерту – Кестені автор [75, 90, 114] дереккөздері бойынша құрастырған.	

1.8 Кватернион бөлшек Фурье түрлендіруі (QFrFT)

С комплекс өрісінің төрт өлшемді (4D) алгебрасына кеңейтілуінің алғаш тұжырымдамасын Уильям Роуэн Гамильтон (Hamilton) ойлап тапты, оны кватернион алгебрасы деп атады және қазіргі уақытта оны Гамильтонның құрметіне $\mathbb{H}$ деп белгілейді. Соңғы 30 жылдар аралығында кватернион алгебрасы арқылы қызыл (Red), жасыл (Green) және көк (Blue) түстерінің қоспасынан (RGB) тұратын пиксельді бір уақытта басқарылатын қарапайым көрініс ретінде ұсынуға болатындығы көрсетілді. Содан бері кватернион алгебрасы түсті кескіндерді өңдеуде қолданылып жүр. Оған қоса, кватернион алгебрасы үш өлшемді (3D) компьютерлік графика, аэроғарыштық техника, AI жасанды интеллект және инженерия, физика, қолданбалы математиканың әртүрлі салаларында қолданыстарын тапты.

Кватернион $f \in \mathbb{H}$ дегеніміз $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}$ және i, j, k жорамал бірліктері болатын гиперкомплекс сан [79-87, 89]

$$\mathbb{H} := \{ f = f_0 + if_1 + jf_2 + kf_3; f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}, \}, \quad (1.23)$$

мұндағы үш түрлі жорамал бірліктер кватернионның ауыспалы емес (коммутативті емес) көбейту ережелеріне бағынады

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Жақында көп өлшемді сигналдар мен кескіндерді зерттеу үшін кватернион алгебрасындағы ФТ кеңеюі болып табылатын кватернион бөлшек Фурье түрлендіруі (QFrFT) [88, 89] шығарылды. QFrFT кватернион (гиперкомплекс) сигналдарды көрсетуде (презентациялауда) маңызды рөл атқарады және кватернион Фурье түрлендіруін (QFT) [79-84, 90] жалпылайды. QFT құнды құрал, дегенмен келесі кемшіліктері бар:

- QFT жиілік облысының талдауымен шектеледі, бөлшек облысын талдайтын икемділігі жоқ;
- QFT корреляция немесе регрессия сияқты ықтималдық құралдарымен байланыстыру біршама қиындыққа ие;
- Оның көп өлшемді кватерниондық сигналдарды талдаудағы пайдасы шектеулі.

QFT-дің кемшіліктерін QFrFT [88, 89] келесі жолдармен шешеді:

- QFrFT уақыт пен жиілік арасындағы бөлшек облысын талдай алады;
- Сигналдарды өңдеу мен ықтималдық теориясы арасында жаңа көпір орнатады;
- Көп өлшемді кватерниондық сигналды талдау үшін құрал бола алады, әрі қолдану ауқымын физика және компьютерлік визуализация (бейнелеу) сияқты қолданбаларға кеңейтеді.

Кватернион түрлендірулер түсті кескіндерді өңдеу, стеганографиялық жүйелер, сөйлеуді тану, дифференциалдық жүйелер және математикалық статистика сияқты әртүрлі салаларда қолданбаларға ие [79-84, 86].

Анықтама 1.8.1 (QFrFT). $f(t)$ сигналының бұрышы β болатын бір өлшемді (1D) QFrFT $\mathcal{F}_\beta(u)$ деп белгіленеді және төмендегідей анықталады [88, 89]

$$\mathcal{F}_\beta(u) = A_\beta \int_{\mathbb{R}} f(t) K_\beta(t, u) d\tau, \quad (1.25)$$

мұндағы $K_\beta(t, u)$ – 1D QFrFT-дің кернелі

$$K_\beta(t, u) = e^{i \left(\frac{t^2 + u^2}{2} \cot \beta - tu \csc \beta \right)}, \quad (1.26)$$

және A_β – нормалау тұрақтысы

$$A_\beta = \sqrt{\frac{1 - i \cot \beta}{2\pi}}. \quad (1.27)$$

1.9 Алдыңғы зерттеу нәтижелері

FrFT дамуымен 1993 жылы Ломан (Lohmann) [115] және 1994 жылы Альмейда (Almeida) [32] WVD мен FrFT арасындағы байланысты зерттеді. Олар FrFT-ген сигналдың WVD-і уақыт-жиілік жазықтығында WVD-дің айналуы (rotation, вращение) ретінде көрінетінін көрсеткен. 2001 жылы, осы зерттеу бағытын ұстанған Пей мен Диң FrFT, LCT және WVD қасиеттеріне сүйене отырып, қарапайым бөлшек және канондық операторлар арасындағы байланыстарды зерттеп талқылады [53]. Пей мен Диң баяндаған, сызықтық канондық Вигнер үлестірімі (LCWD) деп аталатын, $\mathcal{WD}_A$ деп белгіленетін, гибриді түрлендіру көп компонентті сигналдарды бөлу (separation, разделение) үшін пайдаланылды. Бұл төмендегідей анықталады [53, 54]

$$\mathcal{WD}_A(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_A\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \overline{\mathcal{L}_A\left(u - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-iv\tau} d\tau, \quad (1.28)$$

мұндағы $\mathcal{L}_A(u)$ параметр матрицасы $A = (a, b, c, d)$ болатын $f(t)$ сигналының LCT-і.

LCWD-ден бөлек, 2012 жылы Бай және т.б. WVD мен LCT-ді біріктіріп, WVD-дің жалпы түрін алды. Оны WVD-LCT (немесе WDL) деп атады және $\mathcal{WDL}_f$ деп белгіледі. Бұл түрлендіру FT-нің e^{-iut} кернелін

$\frac{1}{\sqrt{i2\pi b}} e^{i\left(\frac{a}{2b}\tau^2 - \frac{1}{b}\tau u + \frac{d}{2b}u^2\right)}$ LCT кернелімен алмастыру нәтижесінде алынған [54]

$$\mathcal{WDL}_f(t, u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{i2\pi b}} e^{i\left(\frac{a}{2b}\tau^2 - \frac{1}{b}\tau u + \frac{d}{2b}u^2\right)} d\tau. \quad (1.29)$$

WVD-LCT LCWD әрі WVD-дың жалпы түрі. WVD-LCT τ – ға тәуелді $R_f(t, \tau)$ лездік автокорреляция функциясының LCT-і екені анық

$$\mathcal{WDL}_f(t, u) = \mathcal{L}_A\{R_f(t, \tau)\}. \quad (1.30)$$

Сондай-ақ [54]-те WVD-LCT-дің негізгі қасиеттері мен LFM сигналын анықтаудағы қолданысы көрсетілген. [59, 67]-де WVD-LCT-дің анықталмағандық принциптері зерттелген. Соң және т.б. WVD-LCT-ді

квадраттық жиілікті модуляцияланған сигнал параметрін бағалауда қолданды [55]. 2015 жылы WVD-LCT-дің конвульсия және корреляция теоремалары дәлелденген [56]. Леу және т.б. (Liu *et al.*) WVD-ді LCT-мен байланыстыру арқылы лездік жиілікті бағалаудың жаңа әдісін ұсынды, оның шуға қарсы қабілеті жоғары және WVD-ге қарағанда бағалау (estimation, оценка) дәлдігі жоғары екенін дәлелдеген [60]. Джаң мен Луо (Zhang and Luo) LCWD және WVD-LCT біріктірді [116], кейінірек Джаң оның аз параметрлері бар ерекше жағдайларын ұсынды [64, 66].

2016 жылы WVD-мен салыстырғанда маргинал қасиеттерінде және аффиндік түрлендіру қатынастарында қарапайымдылыққа ие WL деп аталатын LCT-де лездік автокорреляция функциясымен байланысқан WVD анықталған [61]

$$\mathcal{WL}_f(t, u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}\tau^2 - \frac{2}{b}u\tau\right)} d\tau. \quad (1.31)$$

WL-ге ұқсас Щинь мен Ли (Xin and Li) LFM сигналының екі фазалық коэффициентін бір уақытта бағалай алатын және көп компонентті LFM сигнал үшін айқас-термдерді тиімді түрде басатын LCT-мен байланысты WVD-дің жаңа анықтамасын және оның интеграциялық формасын ұсынды [117]. 2018 жылы WVD-LCT және оның ерекше жағдайларының жалпылауы болып табылатын OLCT-мен байланысқан WVD (WVD-OLCT) енгізілген және ол $WDO\mathcal{L}_f$ деп белгіленген [57]

$$\begin{aligned} WDO\mathcal{L}_f(t, u) = \\ = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{i2\pi b}} e^{i\left(\frac{a}{2b}\tau^2 - \frac{1}{b}\tau(u - u_0) + \frac{d}{2b}(u^2 + u_0^2) - \frac{u}{b}(du_0 - bu_0)\right)} d\tau. \end{aligned} \quad (1.32)$$

4-кестеде WVD-OLCT-дің кейбір қасиеттері тізілген. WVD-OLCT-дің қасиеттері мен қолданыстары туралы толығырақ [57]-де баяндалған.

Жақында жоғары өлшемдерді зерттеу үшін WVD-дің LCT-мен немесе OLCT-мен ассоциациялары кватернион алгебрасына [118-120] кеңейтілген. Ал 2023 жылы октониондық LCT-дегі WVD-ді Дар мен Бхат (Dar and Bhat) ұсынған [121]. Сонымен қатар, кейбір зерттеушілер айқындалмағандық функциясын (ambiguity function, функция неопределённости) сызықтық канондық түрлендірумен біріктірді [64, 65, 122-124].

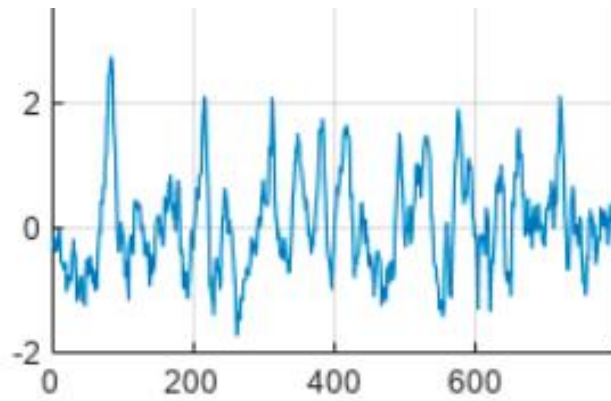
Сигналдар өмірде уақыт бойынша айнымалы, яғни тұрақты емес болатыны белгілі. Сондықтан бір топ зерттеушілер FT орнына қысқа мерзімді Фурье түрлендіруін (STFT) қолдануды ұсынды. STFT тұрақты аралықтарда қолданылатын тұрақты ұзындықтағы уақыт терезесін пайдаланады, осылайша сигналдың бір бөлігі тұрақты болып саналады [125]. Алынған уақыт бойынша өзгертін спектрлік бейнелеу тұрақты емес сигналды талдау үшін өте маңызды.

Вейвлет талдауы [126, 127] STFT орнына сигналды жақсырақ суреттейтін WT ұсынды. Салыстыру мақсатында түпнұсқалық сигнал (original signal) мен WT-ден кейінгі сигнал сәйкесінше 1-сурет пен 2-суретте көрсетілген.

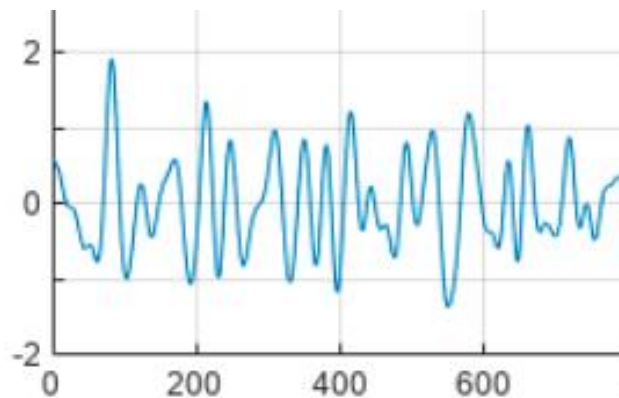
Кесте 4 – WVD-OLCT қасиеттері

Қасиет атауы	Формуласы
Түйіндес симметрия	$\mathcal{WDO}\mathcal{L}_f(t, u) = \overline{\mathcal{WDO}\mathcal{L}_f(t, u)}$
Жиілік маргиналы	$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{WDO}\mathcal{L}_f(t, u) dt = e^{i\left(\frac{d}{2b}u_0^2 - \frac{u(du_0 - b\omega_0)}{b} + \frac{du^2}{2b}\right)} \hat{f}(u) ^2$
Уақыт ауысуы	$f'(t) = f(t - \lambda), \mathcal{WDO}\mathcal{L}_{f'}(t, u) = \mathcal{WDO}\mathcal{L}_f(t - \lambda, u)$
Жиілік ауысуы	$f'(t) = f(t)e^{2\pi i u_1 t},$ $\mathcal{WDO}\mathcal{L}_{f'}(t, u) =$ $= e^{i(-2d\pi u_1(\pi u_1 b + u) + 2\pi u_1(du_0 - b\omega_0))} \mathcal{WDO}\mathcal{L}_f(t, 2\pi u_1 b + u)$
Уақыт және жиілік ауысуы	$\mathcal{WDO}\mathcal{L}_{M_{u_1} \tau_{\lambda} f, M_{u_1} \tau_{\lambda} g}(t, u) = \mathcal{WDO}\mathcal{L}_{f, g}(t - \lambda, u - a\lambda - 2\pi u_1 b)$
Көбейтілген сигнал	$f(t) = g(t)h(t),$ $\mathcal{WDO}\mathcal{L}_f(t, u) =$ $= (1/2\pi b) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WDO}\mathcal{L}_g(t, u - u') \mathcal{W}_g(t, 2\pi b u') du'$
Ескерту – Кестені автор [57, 90] дереккөзі бойынша құрастырған.	

WT-ның кемшілігі жоғары жиілікті аймақта оның жиілік ажыратымдылығы нашар. Бұл кемшілікті жою үшін STFT мен WT артықшылықтарын біріктіру арқылы жаңа гибридті түрлендіру WPT құрастырылды [69, 70]. WPT – Weyl операторы мен толқындық пакеттерді пайдаланатын сызықтық түрлендіру. Соңғы жылдары зерттеушілер WPT-ны сымсыз байланыс (wireless communication, беспроводная связь), деноизация (denoising, шумоподавление) және кескінді сығу (image compression, сжатие изображения) салаларында сәтті қолданды [112, 113, 128-133]. WT-ге қарағанда артықшылығы болғандықтан WPT сигналды өндеуде кеңінен қолданылады [134, 135]. Себебі ол көп деңгейлі ыдырауды (decomposition, разложение) жүзеге асыра алады және дәстүрлі дискреттік WT-де қол жеткізілмейтін жоғары жиілікті ыдырауды талдай алады. Сигналдың жиілік ішкі диапазондары толқындық пакеттердің ыдырауы арқылы таңдалады, бұл сигналдың уақыт жиілігін ажыратымдылығын (resolution, разрешение) жақсартады. WPT толқындық терезеленген сигналдың FT-і ретінде анықталады, сондықтан WPT арқылы алынған нәтижелер энергиясы FT-де жақсы шоғырланбаған шикылдау сигналдарымен жұмыс істеуде оңтайлы (оптималды) болмайды.



Сурет 1 – Түпнұсқалық сигнал



Сурет 2 – WT-дан кейінгі сигнал

2014 жылы квадраттық фазалық Фурье түрлендіруі (QPFT) деп аталатын FT-тің жоғары жалпыланған нұсқасын Кастро (Castro) және басқалары енгізген [71, 72]. Бұл жаңа түрлендіру өтпелі (transient, переходной) және өтпелі емес (non-transient, непереходной) сигналдардың біртұтас талдауын қарапайым және ақпараттық түрде қамтамасыз етеді. QPFT шын мәнінде кернелі экспоненциалды түрде болатын FT, FrFT және LCT сияқты бірнеше белгілі түрлендірулердің жалпылама нұсқасы болып табылады. Қосымша параметрлерінің арқасында QPFT ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында туындайтын мәселелерді (гармоникалық талдау, кескінді өңдеу, т.б.) шешуде бірнеше қолданыстарға ие [73, 75, 114, 136-139].

2019 жылы Прасад пен Шарма (Prasad and Sharma) CWT [51, 99, 140-144], үздіксіз бөлшек вейвлет түрлендіру [145-147], сызықтық канондық вейвлет түрлендірудің [147, 148] жалпы түрі болып табылатын QPFWT-ді енгізді [74]. QPFWT QPFT және WT-нің артықшылықтарын біріктіреді және олардың жеке қасиеттерін игеретін жаңа интегралдық түрлендіру. Дегенмен, QPFWT QPFT-дің толық кернеліне сүйенбейді және QPFT-де бар конволюция құрылымын көрсете алмайды. Осылайша, Шах және т.б. QPFT-мен байланысты конволюцияға толығымен тәуелді болатын QPW-ді енгізді [75].

Классикалық WPT жалпыламаларының бірі ретінде концентрациядағы өнімділікті жақсарту үшін бөлшек толқындық пакетті түрлендіру (Fr-WPT)

және сызықтық канондық толқындық пакетті түрлендіру (LC-WPT) енгізілді [76-78]. Бұл түрлендірулердің сигналды өңдеу мен оптика мәселелерін шешуде қолданыстары бар. Біздің біліуімізше сигналдарды өңдеу теориясы мен қолданбалары үшін өнімді болатын квадраттық фазалық толқындық пакетті түрлендіру (QR-WPT) теориясы әлі күнге дейін ұсынылмаған, сондықтан WPT және QPFT негізінде QR-WPT теориясын зерттеген жөн. Осылайша, бұл жұмыстың мақсаттарының бірі – QR-WPT-ді тереңірек зерттеу.

Кватернион сигналдар дәстүрлі әдістерді жоғары өлшемдерге кеңейту арқылы жақсартады. Зерттеушілер өзара байланысты бірнеше компоненттері бар стохастикалық процестерді талдаудың күрделі тәсілдерін жасау үшін кватерниондарды пайдаланды. Бұл жұмыс ықтималдық талдау үшін жаңа перспективалар мен құралдарды ұсына отырып, кватернион кездейсоқ шамаларды, ықтималдық тығыздық функцияларын және сипаттамалық функцияларды дамытуға әкелді. Бұл саладағы елеулі жетістіктерге QFT дамуы және оның сигналдарды өңдеуде қолданылуы жатады [79-84, 90]. Бұл түрлендірулер сүзгілеу және қайта құру сияқты операцияларға қолдау көрсете отырып, олардың көп өлшемді құрылымын сақтай отырып, кватернион мәнді сигналдарды басқарудың тиімді негізін қамтамасыз етеді. Зерттеушілер [149-155] ықтималдықтар теориясының шеңберінде кватернион сигналдардың теориялық және практикалық түсінігін кеңейтті. Ықтималдықтар теориясы мен кватернион алгебрасын біріктіру көп өлшемді сигнал талдауына негізделген өрістердегі практикалық қолданбаларды ашу кезінде теориялық негіздерді байытады.

Бірінші бөлім бойынша тұжырымдар

Бірінші бөлімде келесі бөлімдерде қолданылатын түрлендірулерге қысқаша шолу жасалды: даму тарихы, кемшіліктері мен артықшылықтары баяндалды және түрлендірулердің анықтамалары берілді. Бұл бөлімде анықтамасы берілген түрлендірулерді классикалық және гибриді түрлендірулер деп екіге бөлуге болады:

- 1) Классикалық түрлендірулер: FT, WFT, WVD, LCT, OLCT, CWT, QPFT, CQPWT.
- 2) Гибриді түрлендірулер:
 - WVD-ге байланысты гибриді түрлендірулер: LCWD, WVD-LCT, WL, WVD-OLCT.
 - WT-ге байланысты гибриді түрлендірулер: WPT, QPFWT.

Гибриді түрлендірулерге байланысты зерттеулер 30 жылдай бұрын бастауын алған, содан бері бірнеше гибриді түрлендірулер құрастырылған. Қолданыстарда классикалық түрлендірулерге қарағанда гибриді түрлендірулердің мүмкіндіктері қасиеттерінің мол болу себебінен молырақ. Сондықтан да гибриді түрлендірулерді дамыту, зерттеу ақпаратты жүйелердегі сигналдарды өңдеу мәселелерін шешуде маңызды. Классикалық және гибриді түрлендірулерден бөлек осы бөлімде кватернион түрлендірулер туралы мағлұмат берілді.

2 ВИГНЕР-ВИЛЛЕ ҮЛЕСТІРІМІНДЕГІ ОФСЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ КАНОНДЫҚ ТҮРЛЕНДІРУ (WOL)

OLCT мен классикалық WVD теориясына сүйене отырып, бұл бөлімде OLCT-дегі WVD анықтамасының жаңа түрін ұсынамыз, яғни WOL түрлендіруін анықтаймыз. WOL WVD-мен біріктірілген OLCT-лер ішіндегі ең ықшам түрлендіру және де бұл түрлендіру [61]-де анықталған WL-дің, әрі WVD-дың жалпылауы болып табылады. Сонымен қатар, WOL-дың әртүрлі қасиеттерін, атап айтқанда түйіндес симметрия, уақыт маргиналы, жиілік маргиналы, уақыт ауысуы, жиілік ауысуы, Моял формуласы, энергияның үлестірімі, сигналдарды көбейту қасиеттерін анықтаймыз. Сондай-ақ, осы бөлімде лездік жиілікті есептеудің жаңа әдісін ұсынамыз және WOL анықталмағандық принципін көрсетеміз.

2.1 WOL анықтамасы

Анықтама 2.1.1 (WOL). Параметр матрицасы $\mathbf{A} = (a, b, c, d, u_0, \omega_0)$ болатын f және g сигналдарының $\mathcal{WOL}_{f,g}$ айқас WOL түрлендіруі төмендегідей анықталады [91]

$$\mathcal{WOL}_{f,g}(t, u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}\tau(u_0 - u)} d\tau. \quad (2.1)$$

$f = g$ болса, $\mathcal{WOL}_{f,f}(t, u)$ болады және ол авто WOL деп аталады, яғни,

$$\mathcal{WOL}_{f,f}(t, u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}\tau(u_0 - u)} d\tau. \quad (2.2)$$

Осы жұмыста авто WOL түрлендіруіне зерттеу жүргіземіз және қолайлылық үшін WOL түрлендіруі деп атаймыз және $\mathcal{WOL}_f(t, u)$ деп белгілейміз.

WL және WVD түрлендірулерін WOL арқылы оңай алуға болады [68]:

- i. Егер $\mathbf{A}$ параметрі $\mathbf{A} = (a, b, c, d, 0, 0)$ болып кемітілсе, онда WOL түрлендіруі WL-ге айналады

$$\mathcal{WOL}_f^{(a,b,c,d,0,0)}(t, u) = \mathcal{WL}_f(t, u). \quad (2.3)$$

- ii. Егер параметр матрицаны $\mathbf{A} = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$ деп өзгертсек, онда WOL түрлендіруі WVD-ға айналады

$$\mathcal{WOL}_f^{(0,1,-1,0,0,0)}(t, u) = \mathcal{W}_f(t, u). \quad (2.4)$$

(2.3) және (2.4) формулаларынан WOL түрлендіруі WL және WVD-дың жалпы түрі екені айқын.

2.2 WOL қасиеттері

Төменде біз WOL-дың негізгі қасиеттерін дәлелдедік. Бұл қасиеттерді WL-ге қатысты ұқсас әдістерді қолдану арқылы алуға болады.

Қасиет 2.2.1 (Түйіндес симметрия қасиеті). WOL түрлендіруі түйіндес симметрия қасиетіне ие

$$\overline{\mathcal{WOL}_f(t, u)} = \mathcal{WOL}_f(t, u). \quad (2.5)$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{WOL}_f(t, u)} &= \int_{\mathbb{R}} f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t + \frac{\tau}{2}\right)} e^{-\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}\tau(u_0 - u)} d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau'}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau'}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau' t} e^{\frac{i}{b}\tau'(u_0 - u)} d\tau' = \\ &= \mathcal{WOL}_f(t, u), \end{aligned} \quad (2.6)$$

және бұл қасиеттің дәлелденгенін көрсетеді.

WOL-дың бұл қасиеті WOL t және u екі айнымалыда да нақты мәнді және үздіксіз екенін, әрі графикалық түрде уақыт-жиілік жазықтығында бет ретінде көрсетуге болатынын көрсетеді.

Қасиет 2.2.2 (Уақыт маргиналы қасиеті). WOL-дың уақыт маргиналы қасиеті былай өрнектеледі

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t, u) du = 2\pi |b| |f(t)|^2. \quad (2.7)$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t, u) du &= \int_{\mathbb{R}^2} R_f(t, \tau) e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}\tau(u_0 - u)} d\tau du = \\ &= \int_{\mathbb{R}} R_f(t, \tau) e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}u_0\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{b}u\tau} du \right) d\tau = \\ &= 2\pi |b| \int_{\mathbb{R}} R_f(t, \tau) e^{\frac{ia}{2b}\tau^2} e^{\frac{i}{b}u_0\tau} \delta(\tau) d\tau = \\ &= 2\pi |b| |f(t)|^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

ал бұл дәлелдеуді аяқтайды. Мұнда және келесі формулаларда $R_f(t, \tau)$ – лездік автокорреляция функциясы.

Қасиет 2.2.3 (Жиілік маргиналы қасиеті). WOL-дың жиілік маргиналы қасиеті былай өрнектеледі

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t, u) dt = 2\pi |b| \left| \hat{f}(u) \right|^2. \quad (2.9)$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t, u) dt &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\tau} d\tau dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{2b}\left(t^2 + t\tau + \frac{\tau^2}{4} - t^2 + t\tau - \frac{\tau^2}{4}\right)} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\left(t + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} - t\right)} d\tau dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{2b}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)^2} e^{-\frac{ia}{2b}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\left(t + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} - t\right)} d\tau dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Алмастырулар жасаймыз, яғни $\omega = t + \frac{\tau}{2}$ және $\nu = t - \frac{\tau}{2}$ десек, онда жоғарыдағы теңдеу соңғы нәтижеге келеді

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t, u) dt &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\omega) \overline{f(\nu)} e^{\frac{ia}{2b}\omega^2} e^{-\frac{ia}{2b}\nu^2} e^{\frac{i}{b}u_0(\omega-\nu)} e^{-\frac{i}{b}u(\omega-\nu)} d\omega d\nu = \\ &= 2\pi |b| \left| \hat{f}(u) \right|^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

осылайша дәлелдеуді аяқтаймыз.

Қасиет 2.2.4 (Уақыт ауысуы қасиеті). Егер сигнал $f'(t) = f(t - \lambda)$ болса, онда WOL төмендегідей өрнектеледі

$$\mathcal{WOL}_{f'}(t, u) = \mathcal{WOL}_f(t - \lambda, u - a\lambda). \quad (2.12)$$

Дәлелдеуі. WOL анықтамасын пайдаланамыз, сонда

$$\mathcal{WOL}_{f'}(t, u) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2} - \lambda\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2} - \lambda\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\tau} d\tau = \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2} - \lambda\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2} - \lambda\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\tau} e^{-\frac{ia}{b}\tau\lambda} e^{\frac{ia}{b}\tau\lambda} d\tau = \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\left((t-\lambda) + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left((t-\lambda) - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau(t-\lambda)} e^{-\frac{i}{b}((u-u_0)-a\lambda)\tau} d\tau = \\
&= \mathcal{WOL}_f(t-\lambda, u-a\lambda).
\end{aligned}$$

Осымен көздеген дәлелге жеттік.

Қасиет 2.2.5 (Жиілік ауысуы қасиеті). Егер сигнал $f'(t) = f(t)e^{iu_1 t}$ болса, онда WOL төмендегідей ауысады

$$\mathcal{WOL}_{f'}(t, u) = \mathcal{WOL}_f(t, u - u_1 b). \quad (2.14)$$

Дәлелдеуі. Есептеулерден мынаған келеміз

$$\begin{aligned}
\mathcal{WOL}_{f'}(t, u) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{iu_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right)} \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-iu_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\tau} d\tau = \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i\left(\frac{a}{b}\tau t - \frac{u-u_1b+u_0}{b}\tau\right)} d\tau = \\
&= \mathcal{WOL}_f(t, u - u_1 b),
\end{aligned} \quad (2.15)$$

және бұл нәтиже қасиеттің дәлелденгенін көрсетеді.

Қасиет 2.2.6 (Моял формуласы). WOL-дың Моял формуласы

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WOL}_f(t, u) \overline{\mathcal{WOL}_g(t, u)} dt du = 2\pi |b| \langle f, g \rangle^2. \quad (2.16)$$

Дәлелдеуі. WOL анықтамасын пайдаланамыз, сонда

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WOL}_f(t, u) \overline{\mathcal{WOL}_g(t, u)} dt du = \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}u_0\tau} e^{-\frac{i}{b}u\tau} \times \\
&\quad \times \overline{g\left(t + \frac{\tau'}{2}\right)} \overline{g\left(t - \frac{\tau'}{2}\right)} e^{-\frac{ia}{b}\tau' t} e^{-\frac{i}{b}u_0\tau'} e^{\frac{i}{b}u\tau'} d\tau d\tau' dt du = \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}u_0\tau} e^{-\frac{i}{b}u\tau} d\tau \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\mathbb{R}} \overline{g\left(t + \frac{\tau'}{2}\right)} g\left(t - \frac{\tau'}{2}\right) e^{-\frac{ia}{b}\tau't} e^{-\frac{i}{b}u_0\tau'} e^{\frac{i}{b}u\tau'} d\tau' dt du = \\
& = \int_{\mathbb{R}^2} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}u_0\tau} d\tau \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}} \overline{g\left(t + \frac{\tau'}{2}\right)} g\left(t - \frac{\tau'}{2}\right) e^{-\frac{ia}{b}\tau't} e^{-\frac{i}{b}u_0\tau'} d\tau' dt \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{b}u(\tau' - \tau)} du.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Дирак дельта функциясын пайдаланамыз

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WOL}_f(t, u) \overline{\mathcal{WOL}_g(t, u)} dt du = \\
& = 2\pi |b| \int_{\mathbb{R}^2} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}u_0\tau} d\tau \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}} \overline{g\left(t + \frac{\tau'}{2}\right)} g\left(t - \frac{\tau'}{2}\right) e^{-\frac{ia}{b}\tau't} e^{-\frac{i}{b}u_0\tau'} \delta(\tau - \tau') d\tau' dt = \\
& = 2\pi |b| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} g\left(t + \frac{\tau}{2}\right) g\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt \right) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Енді $\mu = t - \frac{\tau}{2}$ айнымалысына ауыстыру жасаймыз, сонда

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WOL}_f(t, u) \overline{\mathcal{WOL}_g(t, u)} dt du = \\
& = 2\pi |b| \int_{\mathbb{R}} f(\mu + \tau) \overline{g(\mu + \tau)} d\tau \left(\int_{\mathbb{R}} f(\mu) \overline{g(\mu)} d\mu \right) = \\
& = 2\pi |b| \left| \langle f, g \rangle \right|^2,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

осылай дәлелдеуді аяқтаймыз.

Кейбір әдебиеттерде Моял формуласы Моялдың бірегей (identical, идентичный) тендеуі деп аталады.

Қасиет 2.2.7 (Энергия үлестірімі қасиеті). WOL энергияның таралуы қасиетіне ие

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WOL}_f(t, u) dt du = 2\pi |b| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \tag{2.20}$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WOL}_f(t, u) dt du &= \int_{\mathbb{R}^3} R_f(t, \tau) e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\tau} d\tau dt du = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} R_f(t, \tau) e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}u_0\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{b}u\tau} du \right) d\tau dt = \\
&= 2\pi |b| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

көздеген дәлелге жеттік.

Қасиет 2.2.8 (Көбейтілген сигнал). Егер $f(t)$ сигналы $g(t)$ және $h(t)$ екі сигналдың көбейтіндісі түрінде болса, яғни $f(t) = g(t)h(t)$ түрінде болса, онда

$$\mathcal{WOL}_f(t, u) = \frac{1}{2\pi |b|} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WL}_g(t, u - u') \mathcal{W}_h(t, 2\pi b u') du', \tag{2.22}$$

мұндағы $\mathcal{WL}_g$ – g сигналының WL түрлендіруі;

$\mathcal{W}_h$ – h сигналының WVD-i.

Дәлелдеуі. WOL анықтамасындағы $f(t)$ сигналының орнына $g(t)h(t)$ көбейтілген сигналды қойып есептейміз және төмендегідей дәлелге қол жеткіземіз

$$\begin{aligned}
\mathcal{WOL}_f(t, u) &= \int_{\mathbb{R}} g\left(t + \frac{\tau}{2}\right) h\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} \overline{h\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\tau} d\tau = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} h\left(t + \frac{\tau'}{2}\right) \overline{h\left(t - \frac{\tau'}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\tau} \delta(\tau' - \tau) d\tau d\tau' = \\
&= \frac{1}{2\pi |b|} \int_{\mathbb{R}^3} g\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{-\frac{i}{b}(u-u_0)\tau} \times \\
&\quad \times h\left(t + \frac{\tau'}{2}\right) \overline{h\left(t - \frac{\tau'}{2}\right)} e^{\frac{iu'\tau}{b} - \frac{iu'\tau'}{b}} du' d\tau d\tau' = \\
&= \frac{1}{2\pi |b|} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WL}_g(t, u - u') \mathcal{W}_h(t, 2\pi b u') du',
\end{aligned} \tag{2.23}$$

мұндағы $\mathcal{WL}_g$ – g сигналының WL түрлендіруі;

$\mathcal{W}_h$ – h сигналының WVD-i.

Қасиет 2.2.9 (Лездік жиілік). Кез-келген $f(t) = |f(t)| e^{i\phi(t)}$ сигналы үшін

$$u_i(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \mathcal{WOL}_f(t, u) du}{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t, u) du}. \quad (2.24)$$

Дәлелдеуі. Жоғарыдағы теңдеудің бөлгіші уақыттың шегі қасиеті болып табылады. Осы қасиетті пайдаланып $u_i(t)$ келесі түрде жазуға болады

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \frac{\frac{1}{2\pi|b|} \int_{\mathbb{R}^2} u f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}(u_0 - u)\tau} d\tau du}{|f(t)|^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi|b|} \frac{b}{i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \left(f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{iu_0}{b}\tau} \right)}{\partial \tau} e^{\frac{i}{b}u\tau} d\tau du}{|f(t)|^2} = \\ &= \frac{\frac{b}{i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \left(f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{iu_0}{b}\tau} \right)}{\partial \tau} \delta(\tau) d\tau}{|f(t)|^2} = \\ &= \frac{b}{i} \frac{1}{|f(t)|^2} \frac{\partial \left(f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i\left(\frac{a}{b}t + \frac{u_0}{b}\right)\tau} \right)}{\partial \tau} \Bigg|_{\tau=0} = \\ &= \frac{b}{i} \left(\phi'(t) + \frac{a}{b}t \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Осымен көздеген дәлелге жеттік.

Осы параграфта дәлелденген WOL-дың негізгі қасиеттері 5-кестеде жинақталған.

2.3 WOL-дың анықталмағандық принципі

Осы параграф WOL-дың анықталмағандық принципін анықтайды. Гейзенбергтің анықталмағандық принципі [17, 25, 59] сигналдың сипаттамасын уақыт немесе жиілік облысында талдау үшін пайдалы болғандықтан физика мен коммуникацияда (байланыста) маңызды рөл атқарады. Бұл параграфта біз WOL-дың анықталмағандық принципін көрсетеміз.

Кесте 5 – WOL қасиеттері

Қасиет атауы	Формуласы
Түйіндес симметрия	$\overline{\mathcal{WOL}_f(t,u)} = \mathcal{WOL}_f(t,u)$
Уақыт маргиналы	$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t,u) du = 2\pi b f(t) ^2$
Жиілік маргиналы	$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t,u) dt = 2\pi b \hat{f}(u) ^2$
Уақыт ауысуы	$f'(t) = f(t-\lambda), \mathcal{WOL}_{f'}(t,u) = \mathcal{WOL}_f(t-\lambda, u-a\lambda)$
Жиілік ауысуы	$f'(t) = f(t)e^{i u_1 t}, \mathcal{WOL}_{f'}(t,u) = \mathcal{WOL}_f(t, u-u_1 b)$
Моял формуласы	$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WOL}_f(t,u) \overline{\mathcal{WOL}_g(t,u)} dt du = 2\pi b \langle f, g \rangle ^2$
Энергия үлестірімі	$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WOL}_f(t,u) dt du = 2\pi b \int_{\mathbb{R}} f(t) ^2 dt$
Көбейтілген сигнал	$f(t) = g(t)h(t),$ $\mathcal{WOL}_f(t,u) = (1/2\pi b) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_g(t, u-u') \mathcal{WOL}_h(t, 2\pi b u') du'$
Лездік жиілік	$f(t) = f(t) e^{i\phi(t)}, u_i(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \mathcal{WOL}_f(t,u) du}{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{WOL}_f(t,u) du}$
Ескерту – Кесте автордың жариялымдары [68, 90, 91] бойынша құрастырылған.	

Біріншіден, екі маңызды теңдікті берелік [91]

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t^n \mathcal{WOL}_f(t,u) du &= \int_{\mathbb{R}^2} t^n R_f(t,\tau) e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}\tau(u_0-u)} d\tau du = \\ &= 2\pi |b| \int_{\mathbb{R}} t^n |f(t)|^2 dt, \end{aligned} \quad (2.26)$$

және

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u^n \mathcal{WOL}_f(t,u) dt &= \int_{\mathbb{R}^2} u^n R_f(t,\tau) e^{\frac{ia}{b}\tau t} e^{\frac{i}{b}\tau(u_0-u)} d\tau dt = \\ &= 2\pi |b| \int_{\mathbb{R}} u^n |\hat{f}(u)|^2 du. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Егер $n=2$ болса, онда WOL түрлендіруінің анықталмағандық принципі төмендегідей алынады

$$\begin{aligned}
& 2\pi|b|\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt + 2\pi|b|\int_{\mathbb{R}} u^2 |\hat{f}(u)|^2 du = \\
& = 2\pi|b|\left[\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} u^2 |\hat{f}(u)|^2 du\right] \geq \\
& \geq \frac{\pi|b|}{2}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Бұл $\mathcal{WOL}_f(t,u)$ – ды күрт локализациялау (sharply localize, резко локализовать) мүмкін еместігін көрсетеді.

Екінші бөлім бойынша тұжырымдар

Бұл бөлімде бірінші бөлімде берілген ақпараттарға сүйене отырып WVD-ге байланысты жаңа гибридті түрлендіру WOL құрастырылды және оның әртүрлі қасиеттері дәлелденді. 1-кесте – WVD қасиеттері мен 4-кесте – WVD-OLCT қасиеттері секілді WOL қасиеттері 5-кестеде жинақталып тізілді. WOL қасиеттері сигналды өңдеу саласында және басқа да ғылым мен техникалық салалардың қолданыстарында пайдаланылмақ.

3.1 QR-WPT анықтамасы

Анықтама 3.1.1 (QR-WPT). ψ вейвлет функциясына қатысты $f \in L^2(\mathbb{R})$ сигналының $\mathcal{W}_f^\mu$ QR-WPT-і төмендегідей анықталады [92]

$$\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{\beta, \alpha}^\mu(t)} K_\mu(t, \xi) dt, \quad (3.1)$$

мұндағы $\psi_{\beta, \alpha}^\mu(t) = \psi_\alpha(t - \beta) e^{-ia(t^2 - \beta^2) - id(t - \beta)}$, $\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \psi\left(\frac{t}{\alpha}\right)$;

$K_\mu(t, \xi)$ QR-WPT кернелі деп аталады және төмендегідей өрнектеледі

$$K_\mu(t, \xi) = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(at^2 + bt\xi + c\xi^2 + dt + e\xi)}. \quad (3.2)$$

Анықтама 3.1.1-дегі $\mu = (a, b, c, d, e)$ параметрлерін өзгерту арқылы қолданыстағы уақыт-жиілік түрлендірулерін алуға болады:

- i. Егер $\mu = \left(\frac{a}{2b}, -\frac{1}{b}, \frac{c}{2b}, 0, 0\right)$ болса, онда Анықтама 3.1.1 LC-WPT-ге төмендейді

$$\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K_\mu(t, \xi) \overline{\psi\left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right)} e^{i\frac{a}{2b}(t^2 - \beta^2)} dt. \quad (3.3)$$

- ii. Егер $\mu = (\cot \theta, -\csc \theta, \cot \theta, 0, 0)$, $\theta \neq n\pi$ болса, онда Анықтама 3.1.1 Fr-WPT-ге төмендейді

$$\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K_\mu(t, \xi) \overline{\psi\left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right)} e^{i\cot \theta(t^2 - \beta^2)} dt. \quad (3.4)$$

- iii. Егер $\mu = (0, -1, 1, 0, 0)$ болса, онда Анықтама 3.1.1 классикалық WPT-ге төмендейді

$$\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K_\mu(t, \xi) \overline{\psi\left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right)} dt. \quad (3.5)$$

Сонымен қатар, ашық әдебиетте әлі хабарланбаған төмендегідей жаңа уақыт-жиілік құралын да алуға болады:

- iv. Егер $\mu = (1, b, 0, 1, 0)$, $b \neq 0$ болса, онда біз жаңа Фреснель толқындық пакет түрлендіруін ала аламыз

$$\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K_\mu(t, \xi) \overline{\psi\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)} e^{i(t^2-\beta^2)+id(t-\beta)} dt. \quad (3.6)$$

Айқындық үшін QR-WPT ерекше жағдайлары 6-кестеде жинақталған.

Кесте 6 – QR-WPT ерекше жағдайлары

Түрлендіру	$\mu = (a, b, c, d, e)$ параметрлері
Сызықтық канондық толқындық пакетті түрлендіру (LC-WPT)	$\mu = \left(\frac{a}{2b}, -\frac{1}{b}, \frac{c}{2b}, 0, 0\right)$
Бөлшек толқындық пакетті түрлендіру (Fr-WPT)	$\mu = (\cot \theta, -\csc \theta, \cot \theta, 0, 0), \theta \neq n\pi$
Толқындық пакетті түрлендіру (WPT)	$\mu = (0, -1, 1, 0, 0)$
Фреснель толқындық пакет түрлендіруі	$\mu = (1, b, 0, 1, 0), b \neq 0$
Ескерту – Кесте автордың жарияланымы [90, 92] бойынша құрастырылған.	

Теорема 3.1.1 [92] $f \in L^2(\mathbb{R})$ сигналының QR-WPT мен QPFT-і $\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)$ мен $\mathcal{Q}_\mu[f]$ болса, және $\psi_{\beta, \alpha}^\mu(t)$ QPW болса, онда

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) = & \sqrt{\alpha} \int_{\mathbb{R}} K_\mu(w, \beta) e^{-i(c(\alpha w)^2 + e(\alpha w) - 2cw\xi)} \times \\ & \times \mathcal{Q}_\mu \left\{ e^{ia(\cdot)^2 + id(\cdot)} f(t) \right\} (w + \xi) \mathcal{Q}_\mu \left\{ e^{-ia(\cdot)^2 - id(\cdot)} \psi(\cdot) \right\} (\alpha w) dw. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Дәлелдеуі. Былай белгілейік

$$f_{\xi, \mu} = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(at^2 + bt\xi + c\xi^2 + dt + e\xi)} f(t). \quad (3.8)$$

Жоғарыдағы теңдеудің екі жағынан да QPFT-ді алсақ

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\mu \{ f_{\xi,\mu} \} &= \int_{\mathbb{R}} K_\mu(w,t) f_{\xi,\mu}(t) dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(at^2+btw+cw^2+dt+ew)} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(at^2+bt\xi+c\xi^2+dt+e\xi)} f(t) dt = \\
&= \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(at^2+bt(w+\xi)+c(w+\xi)^2+dt+e(w+\xi))} e^{i(at^2+dt)} f(t) e^{-i2cw\xi} dt = \\
&= \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{-i2cw\xi} \mathcal{Q}_\mu \left\{ e^{i(at^2+dt)} f(t) \right\} (w+\xi). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

[74] -тен

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\mu \{ \psi_{\beta,\alpha}^\mu \} (w) &= \\
&= \sqrt{\alpha} e^{i(a\beta^2+b\beta w+cw^2+d\beta+ew)-ic(aw)^2-ie(aw)} \mathcal{Q}_\mu \left\{ e^{-ia(\cdot)^2-id(\cdot)} \psi(\cdot) \right\} (\alpha w). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

QR-WPT $f_{\xi,\mu}$ және $\psi_{\beta,\alpha}^\mu$ скаляр туындысы арқылы берілген, және QPFT-дің Парсевал теоремасынан

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) &= \langle f_{\xi,\mu}, \psi_{\beta,\alpha}^\mu \rangle = \\
&= \langle \mathcal{Q}_\mu \{ f_{\xi,\mu} \}, \mathcal{Q}_\mu \{ \psi_{\beta,\alpha}^\mu \} \rangle = \\
&= \sqrt{\frac{\alpha b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(a\beta^2+b\beta w+cw^2+d\beta+ew-c(\alpha w)^2-e(aw)-2cw\xi)} \times \\
&\quad \times \mathcal{Q}_\mu \left\{ e^{i(at^2+dt)} f(t) \right\} (w+\xi) \mathcal{Q}_\mu \left\{ e^{-ia(\cdot)^2-id(\cdot)} \psi(\cdot) \right\} (\alpha w) dw. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Осылайша, (1.17) формуласының көмегімен біз қажетті дәлелді аламыз.

Әрі қарай, (3.1)-де берілген QR-WPT анықтамасынан төмендегідей жазуға болады

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) &= \\
&= \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(at^2+bt\xi+c\xi^2+dt+e\xi)+ia(t^2-\beta^2)+id(t-\beta)} f(t) \overline{\psi_\alpha(t-\beta)} dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{\xi,\beta,\alpha}^\mu} dt, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

мұндағы

$$\psi_{\xi, \beta, \alpha}^{\mu}(t) = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{-i(at^2 + bt\xi + c\xi^2 + dt + e\xi) - ia(t^2 - \beta^2) - id(t - \beta)} \psi_{\alpha}(t - \beta). \quad (3.13)$$

Пропозиция 3.1.1 (QR-WPT-дің WFT-мен қатынасы). QR-WPT мен WFT арасындағы қатынас төмендегідей болады [92]

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) &= \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(at^2 + bt\xi + c\xi^2 + dt + e\xi) + ia(t^2 - \beta^2) + id(t - \beta)} f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t - \beta)} dt = \\ &= e^{i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(2at^2 + bt\xi + 2dt)} f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t - \beta)} dt = \\ &= e^{i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(2at^2 + 2dt)} f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t - \beta)} e^{ibt\xi} dt = \\ &= e^{i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} \mathcal{G}_{\psi^{\mu}}\{h(t)\}(b\xi, \beta), \end{aligned} \quad (3.14)$$

мұндағы $h(t) = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(2at^2 + 2dt)} f(t).$

3.2 QR-WPT қасиеттері

Бұл бөлімде біз QR-WPT-мен байланысты кейбір маңызды теңсіздіктерді дәлелдейміз. Сонымен қатар, біз QR-WPT кейбір негізгі қасиеттерін зерттейміз, олар сигналдарды өңдеуде сигналды көрсету (signal representation, представления сигналов) үшін маңызды.

Лемма 3.2.1 [92] $\psi_{\alpha} \in L^p(\mathbb{R})$ және $f \in L^q(\mathbb{R})$ болсын, мұндағы $p, q \in [1, \infty)$ және $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, сонда

$$|\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha)| \leq \alpha^{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{-1}} \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})} \|f\|_{L^q(\mathbb{R})}. \quad (3.15)$$

Дәлелдеуі. (3.12) теңдеуінен

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha)| &= \\ &= \left| \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(at^2 + bt\xi + c\xi^2 + dt + e\xi) + ia(t^2 - \beta^2) + id(t - \beta)} f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t - \beta)} dt \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i(at^2+bt\xi+c\xi^2+dt+e\xi)+ia(t^2-\beta^2)+id(t-\beta)} f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t-\beta)} dt \right| \leq \\
&\leq \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t-\beta)} dt \right|.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Лемма 1.5.1 және Гёльдер теңсіздігі (Holder's inequality, Неравенство Гёльдера) бойынша жоғарыда келтірілген нәтиже төмендегідей болады

$$|\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha)| \leq \alpha^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})} \|f\|_{L^q(\mathbb{R})}, \tag{3.17}$$

және бұл лемманың дәлелденгенін көрсетеді.

Қасиет 3.2.1 (Шектелгендік (Boundedness, Ограниченность) қасиеті). $\psi, f \in L^2(\mathbb{R})$ үшін, QR-WPT $L^2(\mathbb{R})$ -де шектелген.

Дәлелдеуі. Лемма 3.2.1-де $p = q = 2$ десек, онда

$$|\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha)| \leq \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.18}$$

Ал бұл QR-WPT-дің $L^2(\mathbb{R})$ -де шектелгендігін көрсетеді.

Қасиет 3.2.2 $\psi \in L^p(\mathbb{R})$ десек және $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ болса, онда

$$\|\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \alpha^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{3.19}$$

Дәлелдеуі. (3.12) теңдеуіне Минковский теңсіздігін қолдансақ, төмендегіні аламыз

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(at^2+bt\xi+c\xi^2+dt+e\xi)+ia(t^2-\beta^2)+id(t-\beta)} f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t-\beta)} dt \right|^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t) \overline{\psi_{\alpha}(t-\beta)}|^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}} dt.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$t - \beta = u$ деп алсақ,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t) \overline{\psi_\alpha(y)}|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \\
&\leq \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\overline{\psi_\alpha(y)}|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} |f(t)| dt \leq \\
&\leq \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \|\psi_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \\
&\leq \alpha^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

ал бұл дәлелдеуді аяқтайды.

Қасиет 3.2.3 (Моял формуласы). Егер $\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)$ және $\mathcal{W}_g^\mu(\xi, \beta, \alpha)$ сәйкесінше ψ and ϕ вейвлеттеріне қатысты QR-WPT-лер болса, онда

$$\langle \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha), \mathcal{W}_g^\mu(\xi, \beta, \alpha) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle \overline{\psi}, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.22}$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha), \mathcal{W}_g^\mu(\xi, \beta, \alpha) \rangle = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \overline{\mathcal{W}_g^\mu(\xi, \beta, \alpha)} d\xi d\beta = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{\beta, \alpha}^\mu(t)} K_\mu(t, \xi) dt \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t')} \phi_{\beta, \alpha}^\mu(t') \overline{K_\mu(t', \xi)} dt' \right) d\xi d\beta = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t')} \phi_{\beta, \alpha}^\mu(t') \overline{\psi_{\beta, \alpha}^\mu(t)} \int_{\mathbb{R}} K_\mu(t, \xi) \overline{K_\mu(t', \xi)} d\xi dt dt' d\beta = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t')} \phi_\alpha(t' - \beta) \overline{\psi_\alpha(t - \beta)} \frac{b}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ib\xi(t-t')} d\xi dt dt' d\beta = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t')} \phi_\alpha(t' - \beta) \overline{\psi_\alpha(t - \beta)} \delta(t - t') dt' dt d\beta = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} \phi_\alpha(t - \beta) \overline{\psi_\alpha(t - \beta)} dt d\beta = \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\alpha} \phi\left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right) \overline{\psi\left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right)} d\beta = \\
&= \langle \overline{\psi}, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

осымен дәлел аяқталды.

Қасиет 3.2.3 -тің салдары:

1) Егер $\psi = \phi$, онда

$$\langle \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha), \mathcal{W}_g^\mu(\xi, \beta, \alpha) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.24)$$

2) Егер $\psi = \phi$, және $f = g$ болса, онда

$$\langle \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha), \mathcal{W}_g^\mu(\xi, \beta, \alpha) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (3.25)$$

3) Егер $\psi = \phi = 1$ және $f = g$ болса, онда

$$\langle \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha), \mathcal{W}_g^\mu(\xi, \beta, \alpha) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (3.26)$$

Ескерту 3.2.1 (Энергия сақталу заңы (conservation of energy, закон сохранения энергии)). (3.26) теңдеуден QR-WPT үшін энергияның сақталуы заңын бере аламыз

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^2 d\xi d\beta = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \quad (3.27)$$

Қасиет 3.2.4 (Репродуктивті кернел (Reproducing kernel, Воспроизводящее ядро)). $(\xi_0, \beta_0, \alpha) - (\xi, \beta, \alpha)$ жазықтығындағы кез-келген нүкте болсын. $\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)$ төмендегі (3.28) репродуктивті кернел формуласын қанағаттандыруы, $\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)$ функциясының қандай да бір функцияның QR-WPT болуының қажетті және жеткілікті шарты

$$\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) K_{\psi^\mu}(\xi, \beta, \alpha : \xi_0, \beta_0, \alpha) d\xi d\beta, \quad (3.28)$$

мұндағы $\mathcal{W}_f^\mu(\xi_0, \beta_0, \alpha)$ дегеніміз (ξ_0, β_0, α) -дағы $\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)$ функциясының мәні;

$K_{\psi^\mu}(\xi, \beta, \alpha : \xi_0, \beta_0, \alpha)$ репродуктивті кернел деп аталады және

$$K_{\psi^\mu}(\xi, \beta, \alpha : \xi_0, \beta_0, \alpha) = \langle \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu, \psi_{\xi_0, \beta_0, \alpha}^\mu \rangle. \quad (3.29)$$

Дәлелдеуі. (3.12) және (4.8) формулаларынан

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t)} dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t) d\xi d\beta \right) \overline{\psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t)} dt. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$(\xi, \beta, \alpha) = (\xi_0, \beta_0, \alpha)$ деп алсақ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_f^\mu(\xi_0, \beta_0, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t) d\xi d\beta \right) \overline{\psi_{\xi_0, \beta_0, \alpha}^\mu(t)} dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t) \overline{\psi_{\xi_0, \beta_0, \alpha}^\mu(t)} dt d\xi d\beta = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t) \overline{\psi_{\xi_0, \beta_0, \alpha}^\mu(t)} dt \right) d\xi d\beta = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) K_{\psi^\mu}(\xi, \beta, \alpha : \xi_0, \beta_0, \alpha) d\xi d\beta,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

осылайша дәлелдеуді аяқтаймыз.

QR-WPT қасиеттері 7-кестеде жинақталған.

Кесте 7 – QR-WPT қасиеттері

Қасиет атауы	Формуласы
Шектелгендік $L^2(\mathbb{R})$	$\psi, f \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \leq \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \ \psi\ _{L^2(\mathbb{R})} \ f\ _{L^2(\mathbb{R})}.$
Шектелгендік $L^p(\mathbb{R})$	$\psi \in L^p(\mathbb{R}), f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}),$ $\ \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)\ _{L^p(\mathbb{R})} \leq \alpha^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \ \psi\ _{L^p(\mathbb{R})} \ f\ _{L^1(\mathbb{R})}.$
Моял формуласы	$\langle \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha), \mathcal{W}_g^\mu(\xi, \beta, \alpha) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \overline{\langle \psi, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}} \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$
Энергия сақталу заңы	$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) ^2 d\xi d\beta = \int_{\mathbb{R}} f(t) ^2 dt.$
Репродуктивті кернел	$\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) K_{\psi^\mu}(\xi, \beta, \alpha : \xi_0, \beta_0, \alpha) d\xi d\beta,$ $K_{\psi^\mu}(\xi, \beta, \alpha : \xi_0, \beta_0, \alpha) = \langle \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu, \psi_{\xi_0, \beta_0, \alpha}^\mu \rangle.$
Ескерту – Кестені автор [90, 92] дереккөзі бойынша құрастырған.	

3.3 QR-WPT-дің анықталмағандық принциптері

Анықталмағандық принципі көбіне көп осы екі салада қолданылылады:

- гармоникалық талдау;
- сигналды талдау.

Гармоникалық талдаудағы бұл принцип кванттық механиканың анықталмағандық принципінен туындайды. Ол бөлшектің жылдамдығы мен орнын шексіз дәлдікпен өлшеуге болмайтынын айтады. Ал сигнал талдауында былай делінген: егер сигналды тек шектеулі уақыт ішінде бақылайтын болсақ, онда сигналдың жиіліктері туралы ақпарат жоғалады. Бұл бөлімде біз алдымен WFT және QR-WPT арасындағы байланысты қарастыру арқылы QR-WPT үшін

Лейбтің анықталмағандық принципін дәлелдейміз. Содан кейін FT және QR-WPT арасындағы іргелі қатынасты пайдалану арқылы QR-WPT-мен байланысты логарифмдік анықталмағандық принципін аламыз. Соңында QR-WPT үшін Гейзенберг типті анықталмағандық принципінің жалпылауын орнатамыз.

Теорема 3.3.1 (Лейб анықталмағандық принципі). $\psi, f \in L^2(\mathbb{R})$ және $2 \leq p < \infty$ үшін келесі теңсіздік орындалады

$$M_\mu \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^p d\xi d\beta \leq \frac{1}{2} (M_\mu)^p (\|f\|_2 \|\psi\|_2)^p, \quad (3.32)$$

мұндағы $M_\mu = (2\pi)^{-1/2} |b|^{(1/2)-1/p}$.

Дәлелдеуі. Терезеленген Фурье түрлендіруі үшін Лейбтің анықталмағандық принципі [39, 93]

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{G}_\psi\{f\}(\xi, \beta)|^p d\xi d\beta \leq \frac{2}{p} (\|f\|_2 \|\psi\|_2)^p, \quad (3.33)$$

барлық $f, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ және $2 \leq p < \infty$ үшін.

$f \in L^2(\mathbb{R})$ үшін, $h(t) = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(2at^2+2dt)} f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ функциясы бар. Осыны пайдаланып, (3.33) теңсіздігіндегі f -ті h -пен ауыстырамыз

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{G}_{\psi_\alpha}^\mu\{h\}(\xi, \beta)|^p d\xi d\beta \leq \\ & \leq \frac{2}{p} (\|h\|_2 \|\psi_\alpha^\mu\|_2)^p = \frac{2}{p} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(2at^2+2dt)} f(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi_\alpha\|_2 \right)^p. \end{aligned} \quad (3.34)$$

(3.34) формуласындағы $\xi = b\xi$ деп ауыстыру жасаймыз

$$\int_{\mathbb{R}^2} |b| |\mathcal{G}_{\psi_\alpha}^\mu\{h\}(b\xi, \beta)|^p d\xi d\beta \leq \frac{2}{p} \left(\frac{b}{2\pi} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi_\alpha\|_2 \right)^p. \quad (3.35)$$

(3.14) формуласын (3.35) теңсіздігіне пайдаланамыз

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{-i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \right|^p d\xi d\beta \leq \frac{2}{p|b|} \left(\frac{b}{2\pi} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi_\alpha\|_2 \right)^p. \quad (3.36)$$

Енді (3.36) теңсіздігіне Лемма 1.7.1-ні пайдаланамыз

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^p d\xi d\beta &\leq \frac{2}{p|b|} \left(\frac{b}{2\pi} \right)^{\frac{p}{2}} (\|f\|_2 \|\psi\|_2)^p = \\ &= \frac{2}{p} \left(\frac{1}{|b|^{\frac{1}{p}}} \right)^p \left(\frac{|b|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \right)^p (\|f\|_2 \|\psi\|_2)^p, \end{aligned} \quad (3.37)$$

осылайша дәлелдеуді аяқтаймыз.

Лемма 3.3.1 (QR-WPT және FT арасындағы байланыс). (3.12)
теңдеуінен төмендегі байланысты ала аламыз

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) &= \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(at^2 + bt\xi + c\xi^2 + dt + e\xi)} f(t) \overline{\psi_{\beta, \alpha}^\mu} dt = \\ &= \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(at^2 + bt\xi + c\xi^2 + dt + e\xi) + ia(t^2 - \beta^2) + id(t - \beta)} f(t) \overline{\psi_\alpha(t - \beta)} dt = \\ &= e^{i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2at^2 + bt\xi + 2dt)} f(t) \overline{\psi_\alpha(t - \beta)} dt = \\ &= e^{i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2at^2 + 2dt)} e^{ib\xi t} f(t) \overline{\psi_\alpha(t - \beta)} dt = \\ &= e^{i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} \sqrt{\frac{b}{i}} \mathcal{F}\{g\}(b\xi), \end{aligned} \quad (3.38)$$

мұндағы

$$g(t) = e^{i(2at^2 + 2dt)} f(t) \psi_\alpha(t - \beta). \quad (3.39)$$

Теорема 3.3.2 (Логарифмдік анықталмағандық принципі). Егер $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ және $\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)$ Шварц (Schwartz) кеңістігіндегі $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ сигналының QR-WPT-і болса, онда келесі логарифмдік теңсіздік орындалады

$$\begin{aligned} & \|\psi\|^2 \int_{\mathbb{R}} \ln|t| |f(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}^2} \ln|\xi| |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^2 d\xi d\beta \geq \\ & \geq \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi - \ln|b| \right] \|f\|^2 \|\psi\|^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Дәлелдеуі. Кез-келген $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($L^2(\mathbb{R})$ – дегі Шварц кеңістігі) үшін, классикалық FT үшін логарифмдік анықталмағандық принципі төмендегідей анықталады [114]

$$\int_{\mathbb{R}} \ln|t| |f(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} \ln|\xi| |\mathcal{F}\{f(t)\}(\xi)|^2 d\xi \geq \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi \right] \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \quad (3.41)$$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ болғандықтан, (3.39) теңдеуінде берілген g функциясы $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Шварц кеңістігінде жататыны анық. Сондықтан (3.41) теңсіздігіндегі f -ті g -мен ауыстыра аламыз

$$\int_{\mathbb{R}} \ln|t| |g(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} \ln|\xi| |\mathcal{F}\{g(t)\}(\xi)|^2 d\xi \geq \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi \right] \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt. \quad (3.42)$$

ξ – ді $b\xi$ – мен алмастырсақ, (3.42) теңсіздігінен мынаны аламыз

$$\int_{\mathbb{R}} \ln|t| |g(t)|^2 dt + b \int_{\mathbb{R}} \ln|b\xi| |\mathcal{F}\{g(t)\}(b\xi)|^2 d\xi \geq \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi \right] \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt. \quad (3.43)$$

Лемма 3.3.1 мен (3.39) теңдеуін (3.43) теңсіздігіне қолданып, төмендегіні аламыз

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \ln|t| |f(t)\psi_\alpha(t-\beta)|^2 dt + \\ & + b \int_{\mathbb{R}} (\ln|b| + \ln|\xi|) \left| \sqrt{\frac{i}{b}} e^{-i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi \geq \\ & \geq \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi \right] \int_{\mathbb{R}} |f(t)\psi_\alpha(t-\beta)|^2 dt, \end{aligned} \quad (3.44)$$

әрі қарай

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \ln|t| \left| f(t) \psi_{\alpha}(t - \beta) \right|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} \ln|b| \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi + \\
& + \int_{\mathbb{R}} \ln|\xi| \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi \geq \\
& \geq \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi \right] \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) \psi_{\alpha}(t - \beta) \right|^2 dt.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

(3.45) теңсіздігінің екі жағын β –ға қатысты интегралдаймыз

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} \ln|t| \left| f(t) \psi_{\alpha}(t - \beta) \right|^2 dt d\beta + \\
& + \ln|b| \int_{\mathbb{R}^2} \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi d\beta + \\
& + \int_{\mathbb{R}^2} \ln|\xi| \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi d\beta \geq \\
& \geq \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi \right] \int_{\mathbb{R}^2} \left| f(t) \psi_{\alpha}(t - \beta) \right|^2 dt d\beta.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Енді (3.25) теңдеуін (3.46) теңсіздігіне қолданып, дәлелдеуді аяқтаймыз

$$\begin{aligned}
& \|\psi\|^2 \int_{\mathbb{R}} \ln|t| \left| f(t) \right|^2 dt + \int_{\mathbb{R}^2} \ln|\xi| \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi d\beta \geq \\
& \geq \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi \right] \|f\|^2 \|\psi\|^2 - \ln|b| \|f\|^2 \|\psi\|^2 = \\
& = \left[\frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} - \ln \pi - \ln|b| \right] \|f\|^2 \|\psi\|^2.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Теорема 3.3.3 (Гейзенберг анықталмағандық принципі). $\psi, f \in L^2(\mathbb{R})$ және $\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha)$ f сигналының QR-WPT-і болса, онда келесі теңсіздік орындалады

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 \left| f(t) \right|^2 dt \int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi d\beta \geq \left(\frac{1}{2|b|} \|f\|^2 \|\psi\| \right)^2. \tag{3.48}$$

Дәлелдеуі. QPFT үшін классикалық Гейзенберг-Паули-Вейль теңсіздігі ([114]-тегі Теорема 3.2-ні қараңыз) төмендегідей анықталған

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 \left| f(t) \right|^2 dt \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \mathcal{Q}_{\mu}\{f\}(\xi) \right|^2 d\xi \geq \frac{1}{2|b|} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f(t) \right|^2 dt \right)^2. \tag{3.49}$$

QFPT-дің кері түрлендіруін теңсіздіктің сол жағына және QFPT-дің Планшерел теоремасын (Plancherel identity, теорема Планшереля) (3.49) теңсіздігінің оң жағына қолданамыз

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} t^2 \left| \mathcal{Q}_{\mu}^{-1} \left[\mathcal{Q}_{\mu} \{ f(t) \} (\xi) \right] \right|^2 (t) dt \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \mathcal{Q}_{\mu} \{ f(t) \} (\xi) \right|^2 d\xi \geq \\ & \geq \left(\frac{1}{2|b|} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{Q}_{\mu} \{ f(t) \} (\xi) \right|^2 d\xi \right)^2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

$f, \mathcal{Q}_{\mu} \{ f \} \in L^2(\mathbb{R})$ үшін, $\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \in L^2(\mathbb{R})$ бар. (3.50) теңсіздігіндегі $\mathcal{Q}_{\mu} \{ f \}$ орнын $\mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha)$ алмастырып, төмендегіге келеміз

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} t^2 \left| \mathcal{Q}_{\mu}^{-1} \{ \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \} \right|^2 dt \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi \geq \\ & \geq \left(\frac{1}{2|b|} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi \right)^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

ал бұл дегеніміз

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \left| \mathcal{Q}_{\mu}^{-1} \{ \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \} \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq \\ & \geq \frac{1}{2|b|} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (3.52)$$

(3.52) теңсіздігінің екі жағын β -ға қатысты интегралдаймыз

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \left| \mathcal{Q}_{\mu}^{-1} \{ \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \} \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} d\beta \geq \\ & \geq \frac{1}{2|b|} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi d\beta. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Енді Коши-Буняковский теңсіздігін (Cauchy-Schwartz inequality, Неравенство Коши-Буняковского) қолдансақ, (3.53) теңсіздігінен мына нәтижеге келеміз

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} t^2 \left| \mathcal{Q}_{\mu}^{-1} \{ \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \} \right|^2 dt d\beta \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi d\beta \right)^{1/2} \geq \\ & \geq \frac{1}{2|b|} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \mathcal{W}_f^{\mu}(\xi, \beta, \alpha) \right|^2 d\xi d\beta. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Енді (3.25) теңдеуін (3.54) теңсіздігіне қолданамыз

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} t^2 |f(t)\psi(t-\beta)|^2 dt d\beta \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^2 d\xi d\beta \right)^{1/2} \geq \\ & \geq \frac{1}{2|b|} \|f\|^2 \|\psi\|^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Бұдан

$$\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^2 d\xi d\beta \right)^{1/2} \geq \frac{1}{2|b|} \|f\|^2 \|\psi\|, \quad (3.56)$$

бұл дегеніміз

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^2 d\xi d\beta \geq \left(\frac{1}{2|b|} \|f\|^2 \|\psi\| \right)^2, \quad (3.57)$$

осылай дәлелдеуді аяқтаймыз.

Ескерту 3.3.1 $\mu = (a, b, c, d, e)$ параметрін өзгерту арқылы (3.48) Гейзенберг типті теңсіздік белгілі Гейзенберг типті теңсіздіктерді қамтиды. Сонымен бірге төменде тізімделген ашық әдебиетте әлі хабарланбаған жаңа Гейзенберг типті теңсіздіктерді тудырады [92]:

- i. Егер $\mu = \left(\frac{a}{2b}, -\frac{1}{b}, \frac{c}{2b}, 0, 0 \right)$ болса, онда (3.48) Гейзенберг типті теңсіздік LC-WPT-ге арналған Гейзенберг теңсіздігіне дейін төмендейді ([77]-дегі Теорема 6.2-ні қараңыз)

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^2 d\xi d\beta \geq \left(\frac{|b|}{2} \|f\|^2 \|\psi\| \right)^2. \quad (3.58)$$

- ii. Егер $\mu = (\cot \theta, -\csc \theta, \cot \theta, 0, 0)$, $\theta \neq n\pi$ болса, онда Fr-WPT үшін Гейзенберг теңсіздігін аламыз

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^2 d\xi d\beta \geq \left(\frac{\sin \theta}{2} \|f\|^2 \|\psi\| \right)^2. \quad (3.59)$$

- iii. Егер $\mu = (0, -1, 1, 0, 0)$ болса, онда классикалық WPT үшін Гейзенберг теңсіздігін аламыз

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}^2} \xi^2 |\mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha)|^2 d\xi d\beta \geq \left(\frac{1}{2} \|f\|^2 \|\psi\| \right)^2. \quad (3.60)$$

Үшінші бөлім бойынша тұжырымдар

Бұл бөлімде WPT-нің идеясы негізге алынып, кернел және толқынға қосымша өлшем қосу арқылы QR-WPT атты жаңа түрлендірудің анықтамасы ұсынылды. QR-WPT WPT кернелін QPFT кернелімен және вейвлетті QPW-мен ауыстыру арқылы құрастырылған. 2-кестеге ұқсастырылып 6-кестеде QR-WPT-дің ерекше жағдайлары берілді. Содан кейін, сигналдарды өңдеуде сигналды көрсету үшін маңызды болып табылатын QR-WPT-дің бірнеше негізгі қасиеттері зерттелді. Бұл қасиеттер 3-кестеде берілген QPFT қасиеттерінен өзгеше. Осы бөлімнің соңында QR-WPT-мен байланысты Лейбтің анықталмағандық принципі, логарифмдік анықталмағандық теңсіздігі және Гейзенберг типті теңсіздік сияқты бірқатар анықталмағандық теңсіздіктер анықталды.

4 ГИБРИДТІ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРДІҢ ҚОЛДАНЫСТАРЫ

4.1 LFM сигналын анықтау

LFM сигналдарын анықтау сигналдарды өңдеудегі негізгі мәселенің бірі. LFM сигналдары басқаша шикылдау сигналдары ретінде белгілі, ақпараттық және оптикалық жүйелерде кеңінен қолданылуына байланысты радар, сонар және байланыс, соның ішінде спутниктік байланыс сияқты көптеген қолданбаларда жиі кездесетін маңызды стационарлық емес сигналдардың бір түрі болып табылады [40, 46, 47]. Сондықтан LFM сигналдарын анықтау инженериядағы ең маңызды зерттеу тақырыбы болып саналады. Бұл бөлімде WOL-ды LFM сигналын анықтауда қолданамыз; бір компонентті және екі (би-) компонентті LFM сигналдары OLCT-дегі жаңадан анықталған WVD көмегімен талданылады. Иллюстрация үшін біз MATLAB бағдарламалық тілі арқылы WVD, WVD-LCT, WVD-OLCT және WOL үшін симуляция нәтижелерін көрсетеміз және алынған нәтижелерді визуалды салыстырамыз. Аталған құралдардың артықшылықтары мен кемшіліктерін айқындайтын салыстырмалы кесте береміз. Басқа да симуляциялар жасау үшін MATLAB бағдарламалық тілінде әзірленген арнайы қолданбаны таныстырамыз.

4.1.1 WOL арқылы бір компонентті LFM сигналын анықтау

LFM сигналы $f(t) = e^{i\left(\omega t + \frac{mt^2}{2}\right)}$ түрінде берілген делік. Мұндағы ω $f(t)$ сигналының бастапқы жиілігін, ал m $f(t)$ сигналының жиілігін көрсетеді. WOL анықтамасын пайдаланып, бір компонентті LFM сигналының WOL мәнін аламыз

$$\begin{aligned} \text{WOL}_f(t, u) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{\frac{ia}{b}\tau} e^{\frac{i}{b}\tau(u_0 - u)} d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega\tau + m\tau^2)} e^{\frac{ia}{b}\tau} e^{\frac{i}{b}\tau(u_0 - u)} d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\omega + mt + \frac{at}{b} + \frac{u_0}{b} - \frac{u}{b}\right)\tau} d\tau = \\ &= 2\pi\delta\left(\frac{u - u_0}{b} - \frac{at}{b} - (\omega + mt)\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Бұл теңдеу, егер арнайы параметр таңдалса $f(t)$ сигналының WOL түрлендіруі (t, u) жазықтығында түзу сызық, яғни импульс тудыратынын көрсетеді, ал бұл $f(t)$ сигналының WOL-і энергия жинақтау қасиетіне ие екенін көрсетіп тұр. Бұдан бір компонентті LFM сигналын анықтау үшін WOL-ды қолдану өте тиімді және пайдалы екеніне көз жеткіземіз.

4.1.2 WOL арқылы би-компонентті LFM сигналын анықтау

Сигнал төмендегідей екі компонентті сигнал ретінде берілсе

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\left(\omega_1 t + \frac{m_1 t^2}{2}\right)} + e^{i\left(\omega_2 t + \frac{m_2 t^2}{2}\right)}, & |t| < \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| \geq \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (4.2)$$

яғни бұл сигнал екі бір компонентті LFM сигналдарының қосындысы түрінде болуы мүмкін

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad (4.3)$$

және WOL-дың анықтамасын пайдаланып екі компонентті $f(t)$ сигналының WOL түрлендіруін жазамыз

$$\begin{aligned} \mathcal{WOL}_f(t, u) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i\left(\frac{a}{b}t\tau + \frac{\tau}{b}(u_0 - u)\right)} d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(f_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + f_2\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \overline{\left(f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + f_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right)} e^{i\left(\frac{a}{b}t\tau + \frac{\tau}{b}(u_0 - u)\right)} d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i(\cdot)} + f_2\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i(\cdot)} + \\ &+ f_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i(\cdot)} + f_2\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{i(\cdot)} d\tau = \\ &= \mathcal{WOL}_{f_1}(t, u) + \mathcal{WOL}_{f_2}(t, u) + \mathcal{WOL}_{f_1, f_2}(t, u) + \mathcal{WOL}_{f_2, f_1}(t, u). \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\mathcal{WOL}_{f_1}(t, u)$ және $\mathcal{WOL}_{f_2}(t, u)$ сигналдың авто-терм мүшелері, ал $\mathcal{WOL}_{f_1, f_2}(t, u)$ және $\mathcal{WOL}_{f_2, f_1}(t, u)$ айқас-терм мүшелері. Айқас-термдер импульстарды тудыра алмайтындықтан айқас-термдердің болуы анықтау өнімділігіне әсер етеді, дегенмен авто-термдердің бар болғандығынан екі компонентті LFM сигналын әлі де анықтауға болады. Бұдан WOL екі компонентті LFM сигналдарын анықтау үшін де пайдалы екенін көреміз. Және де WOL сызықтық емес қасиетке ие екені айқындалды, яғни екі сигналдың қосындысының WOL-ы сигналдардың WOL-дарының қосындысы емес екеніне көзіміз жетті.

4.1.3 Симуляция нәтижелері

Алынған нәтижелерді тексеру үшін симуляция жасалық. LFM сигналын төмендегідей таңдалық [157]

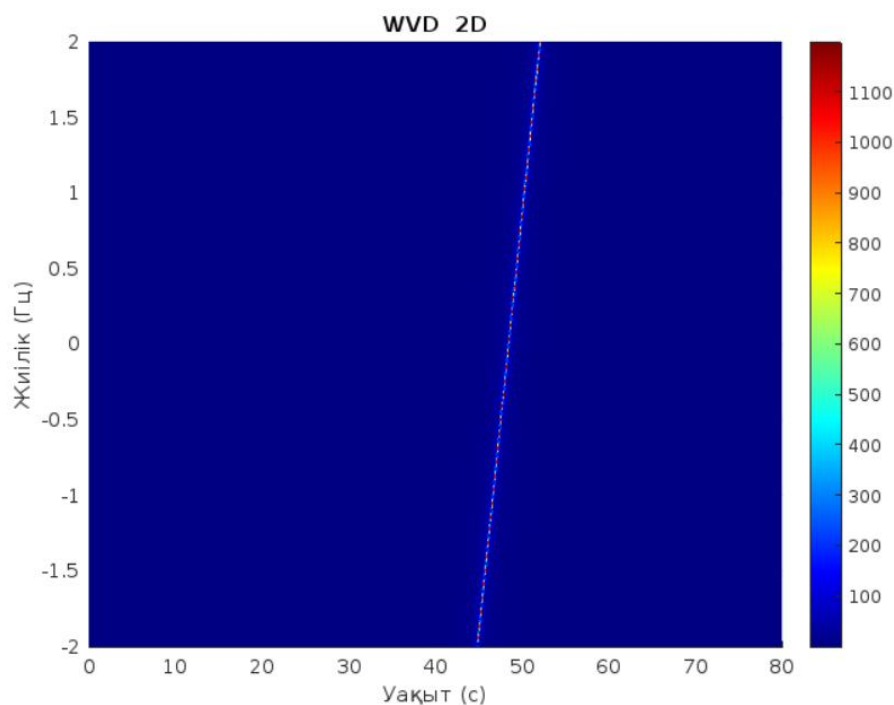
$$f(t) = e^{i\left(\omega_1 t + \frac{m_0 t^2}{2}\right)}, \quad |t| < \frac{T}{2}, \quad (4.5)$$

және $T = 40$; $\omega_1 = 10$; $m_0 = 0.8$; $a = 0.001$; $b = 1$; $c = 0$; $d = 1000$; $u_0 = 1$; $\omega_0 = 10$ деп алып, MATLAB арқылы (4.5)-те берілген $f(t)$ сигналының WVD, WVD-LCT, WVD-OLCT және WOL-дың 2D және 3D суреттерін көрсетеміз:

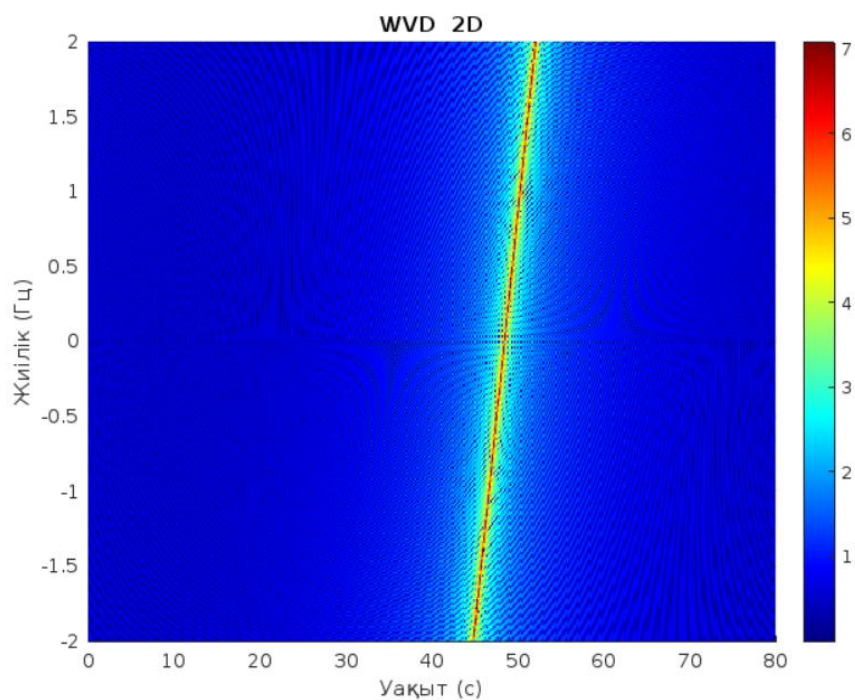
- 3-сурет пен 4-суретте сәйкесінше жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-і және логарифмдік масштабтаумен көрсетілген жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-і көрсетілген. 5-сурет пен 6-суретте сәйкесінше кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-і және логарифмдік масштабтаумен көрсетілген кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-і көрсетілген;
- 7-сурет пен 8-суретте сәйкесінше жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-LCT-і және логарифмдік масштабтаумен көрсетілген жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-LCT-і көрсетілген. 9-сурет пен 10-суретте сәйкесінше кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-LCT-і және логарифмдік масштабтаумен көрсетілген кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-LCT-і көрсетілген;
- 11-сурет пен 12-суретте сәйкесінше жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-OLCT-і және логарифмдік масштабтаумен көрсетілген жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-OLCT-і көрсетілген. 13-сурет пен 14-суретте сәйкесінше кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-OLCT-і және логарифмдік масштабтаумен көрсетілген кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-OLCT-і көрсетілген;
- 15-сурет пен 16-суретте сәйкесінше жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WOL-ы және логарифмдік масштабтаумен көрсетілген жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WOL-ы көрсетілген. 17-сурет пен 18-суретте сәйкесінше кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WOL-ы және логарифмдік масштабтаумен көрсетілген кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WOL-ы көрсетілген;

Түрлендірулерге жасалған симуляция нәтижелерін толық және логарифмдік масштабтаумен көрсеттік. Сигналды логарифмдік масштабтаумен

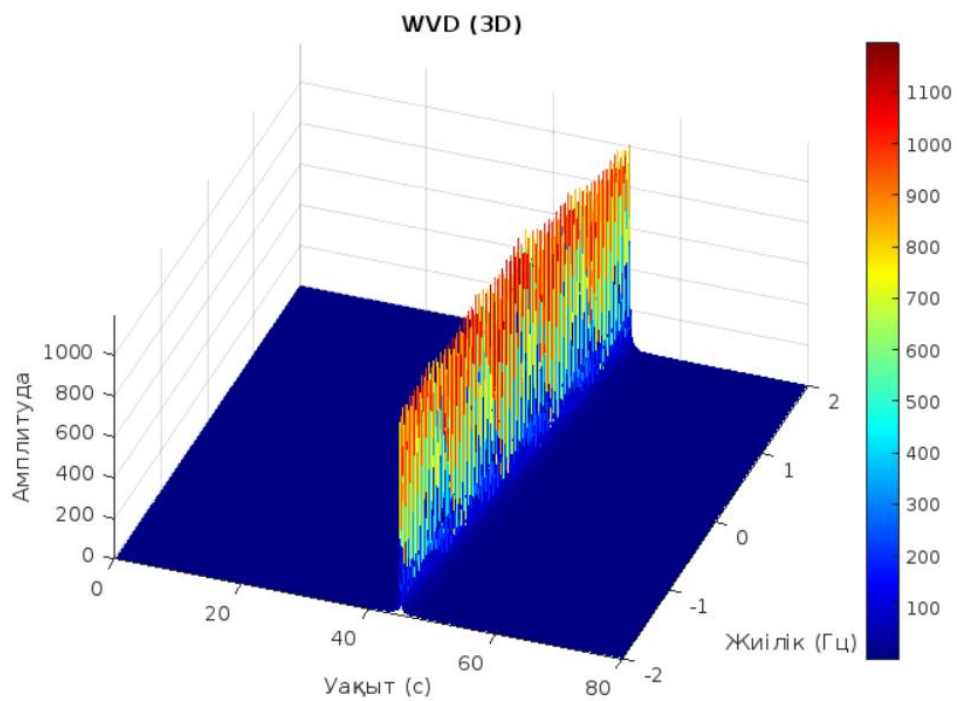
көрсету – бұл сигналдың амплитудасын немесе жиілігін логарифмдік шкала бойынша көрсету. Бұл әдіс динамикалық диапазоны үлкен сигналдарды (мысалы, дыбыс сигналы, жиілік сипаттамасы) тиімді көрсетуге мүмкіндік береді, сол себептен де кеңінен қолданылады.



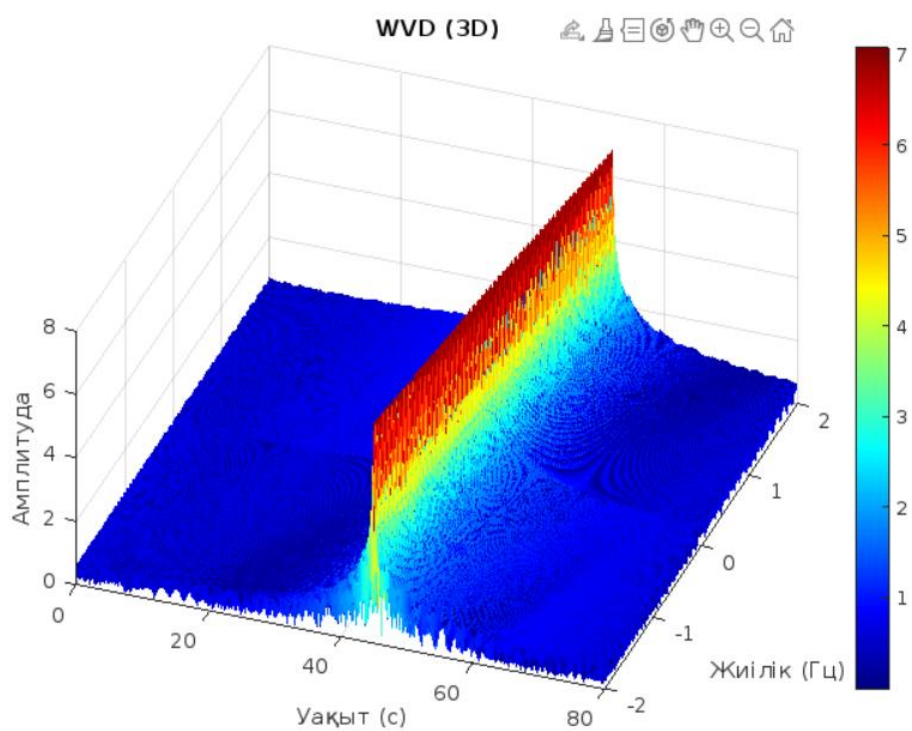
Сурет 3 – Жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-і



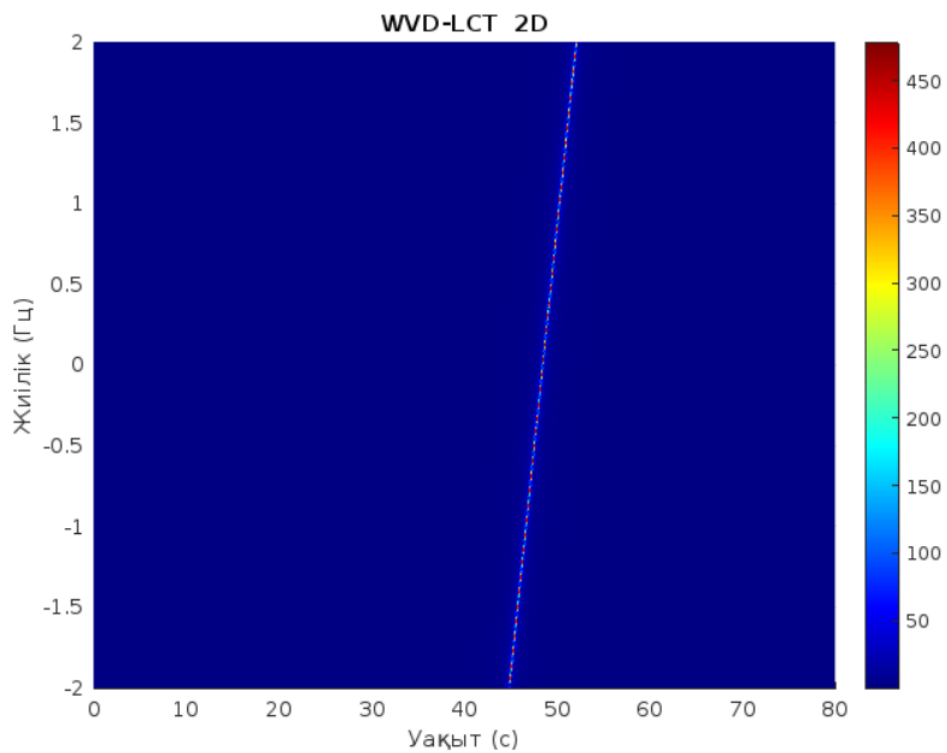
Сурет 4 – Логарифмдік масштабтаумен көрсетілген жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-і



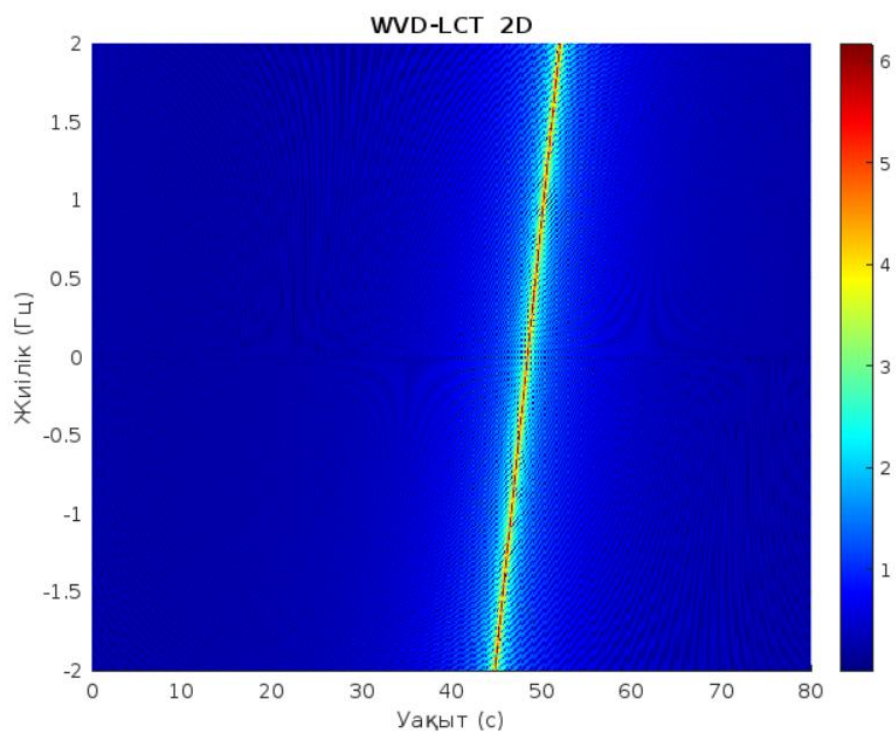
Сурет 5 – Кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-і



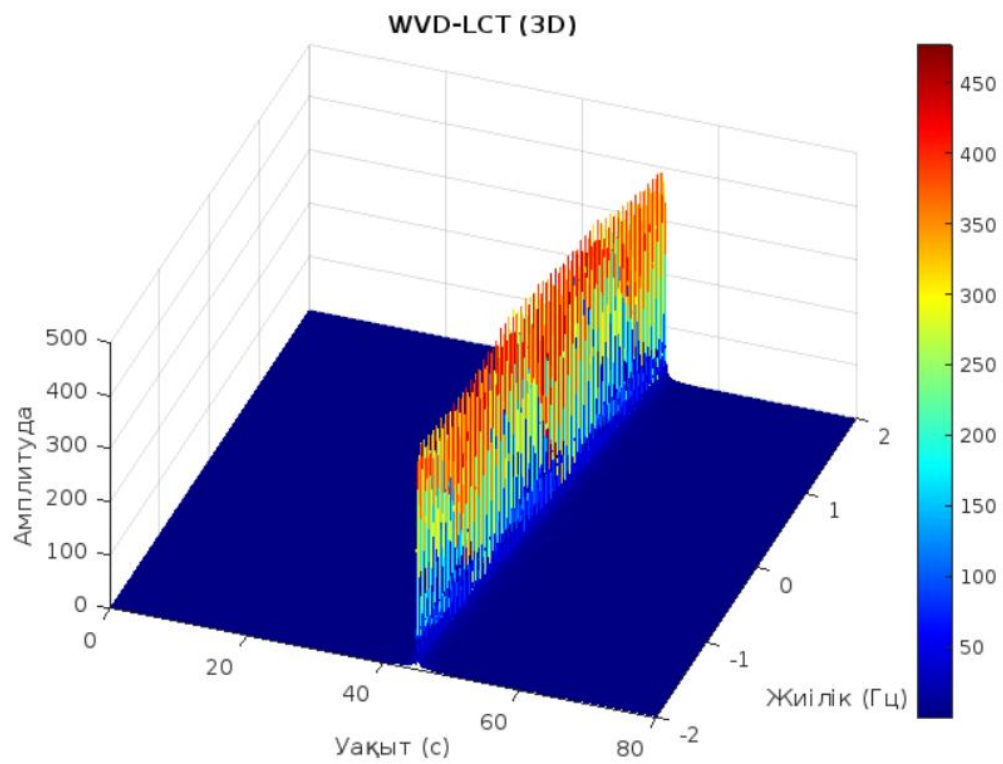
Сурет 6 – Логарифмдік масштабтаумен көрсетілген кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-і



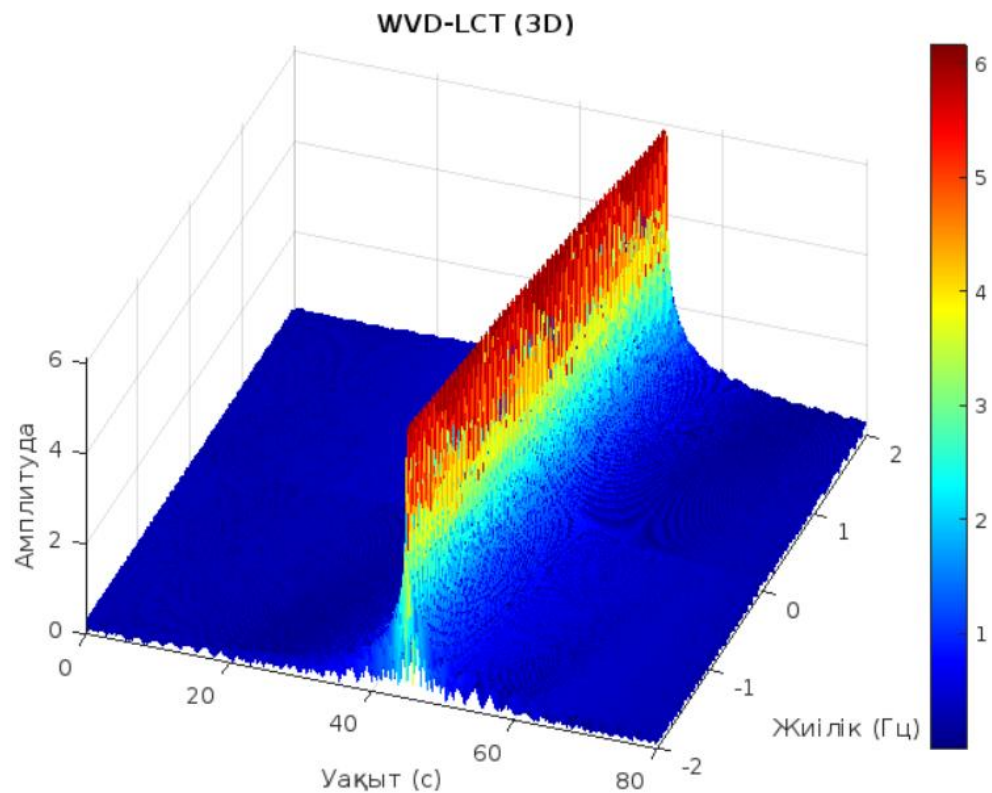
Сурет 7 – Жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-LCT-і



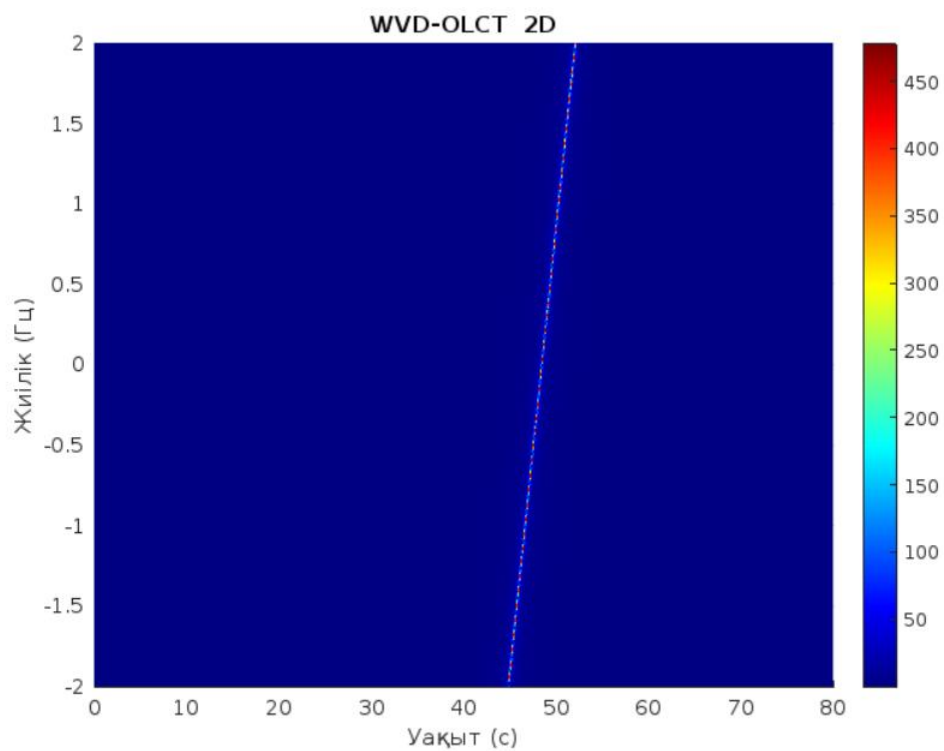
Сурет 8 – Логарифмдік масштабтаумен көрсетілген жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-LCT-і



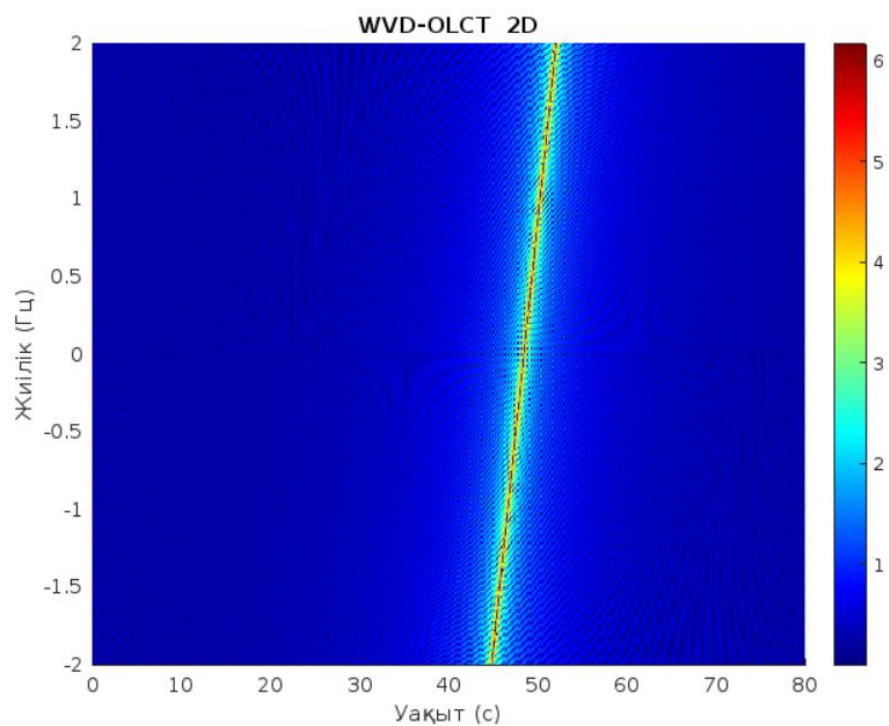
Сурет 9 – Кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-LCT-і



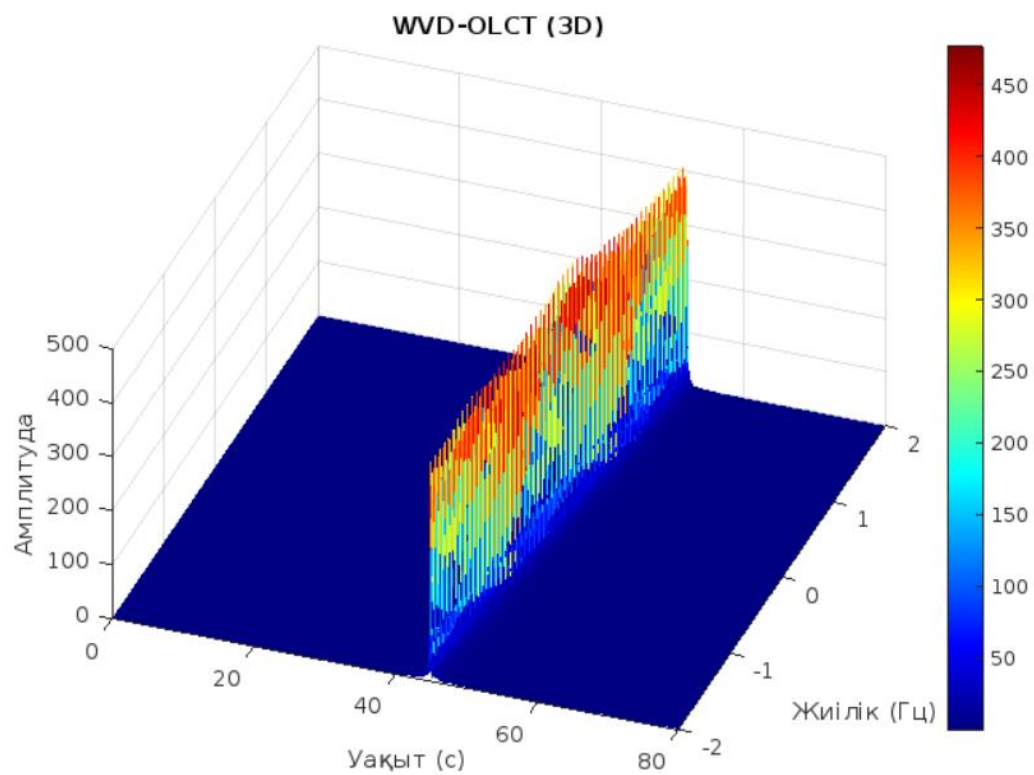
Сурет 10 – Логарифмдік масштабтаумен көрсетілген кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-LCT-і



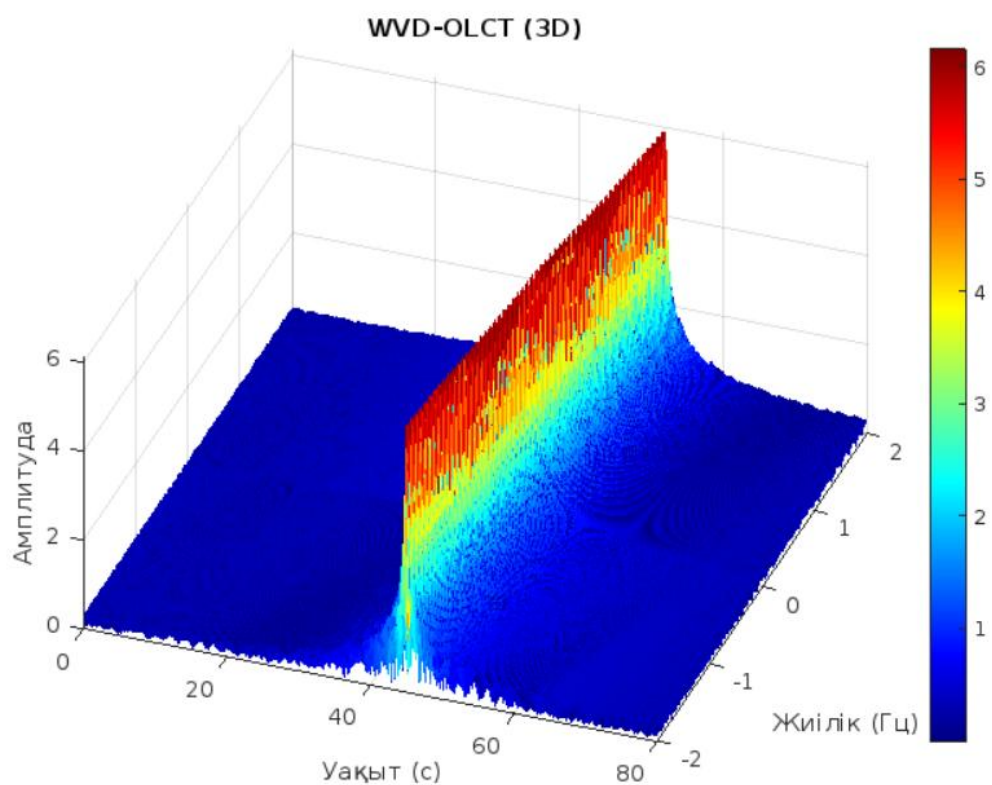
Сурет 11 – Жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-OLCT-і



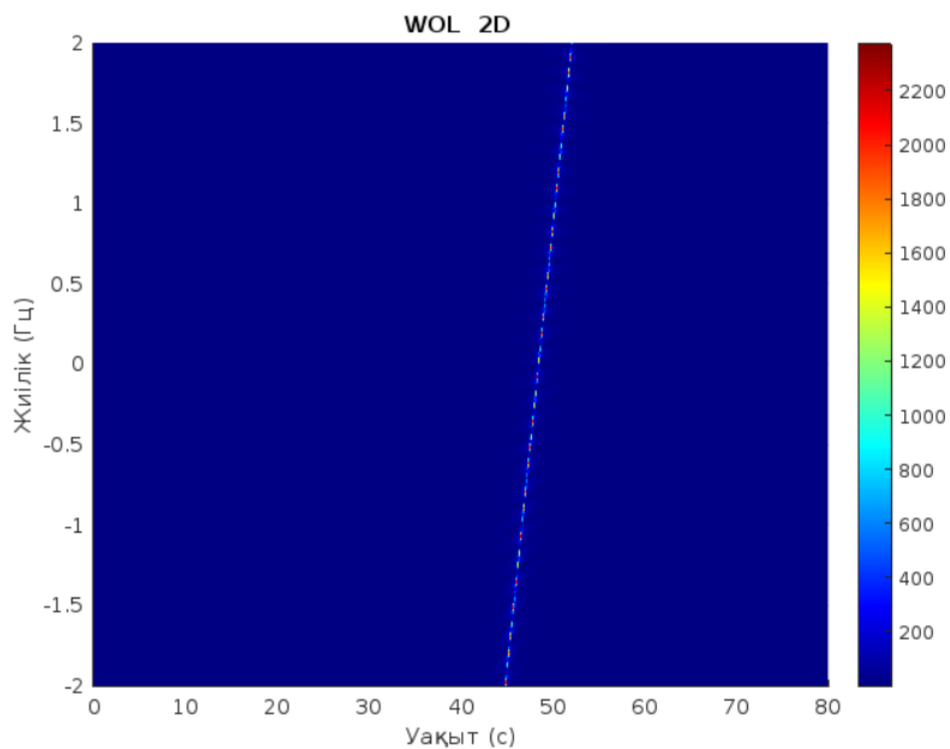
Сурет 12 – Логарифмдік масштабтаумен көрсетілген жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WVD-OLCT-і



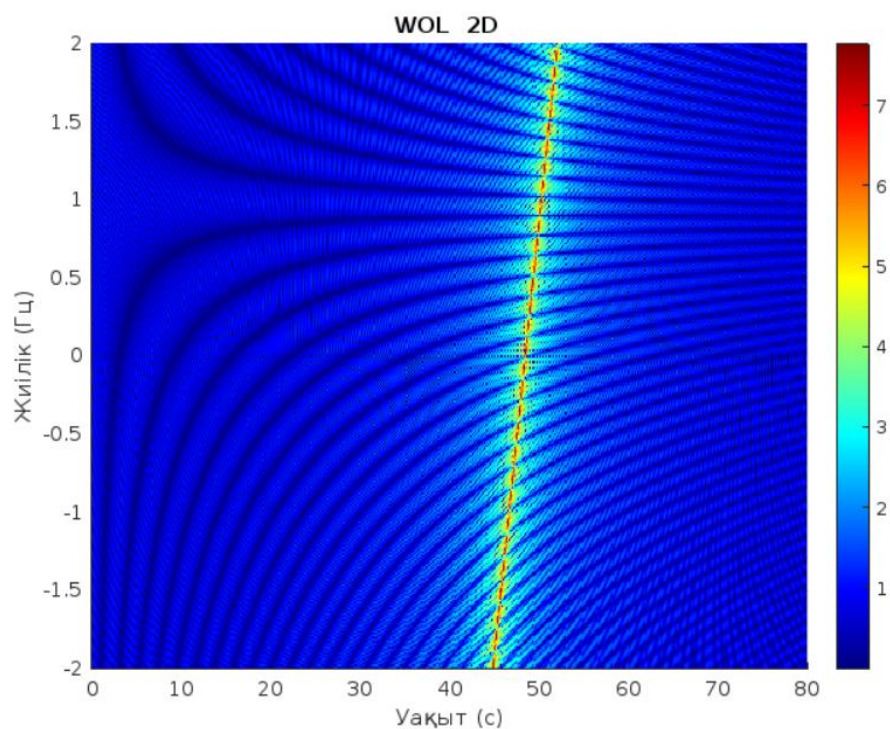
Сурет 13 – Кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-OLCT-і



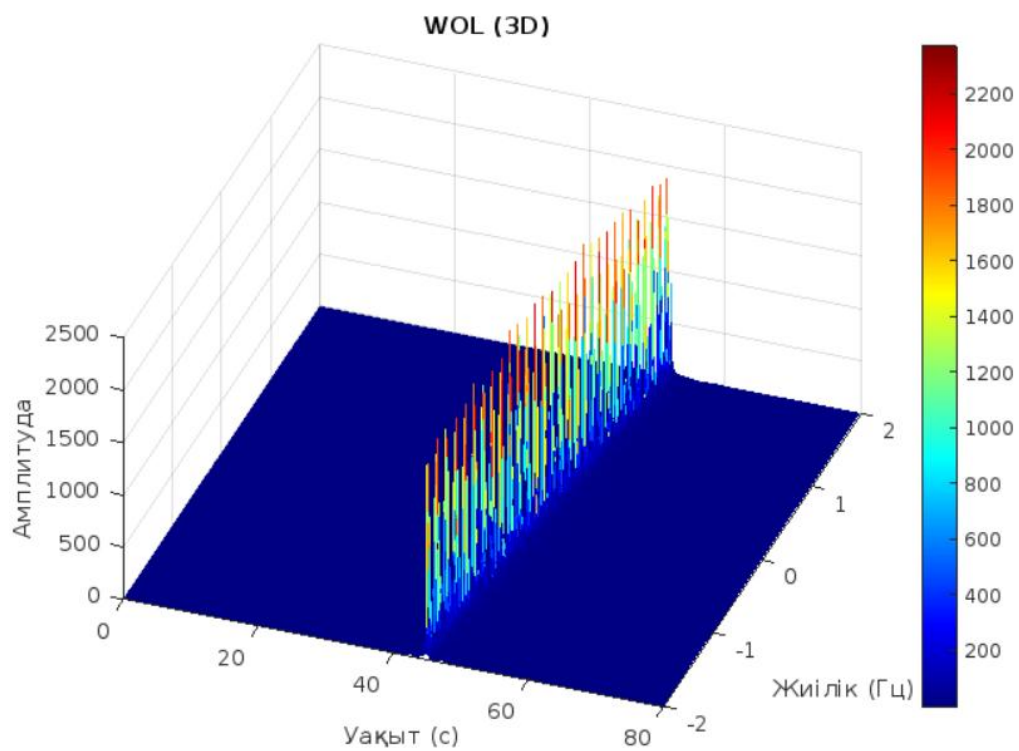
Сурет 14 – Логарифмдік масштабтаумен көрсетілген кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WVD-OLCT-і



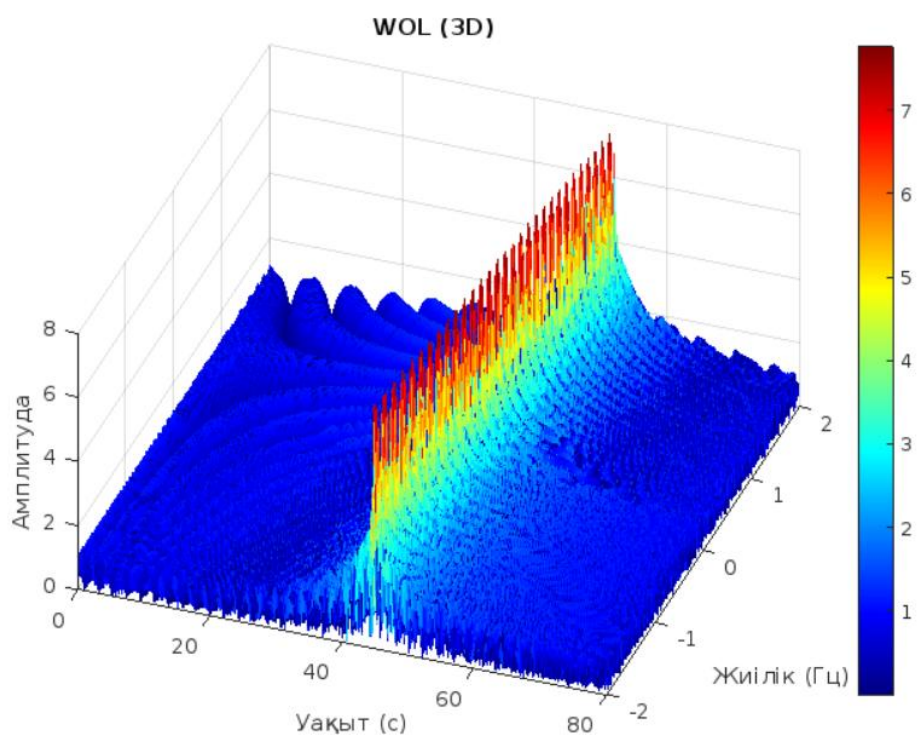
Сурет 15 – Жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WOL-ы



Сурет 16 – Логарифмдік масштабтаумен көрсетілген жазықтықтағы $f(t)$ сигналының WOL-ы



Сурет 17 – Кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WOL-ы



Сурет 18 – Логарифмдік масштабтаумен көрсетілген кеңістіктегі $f(t)$ сигналының WOL-ы

2D суреттерді қарасақ, түзу сызықтардың, яғни импульстердің бар екендігін көреміз. Ал бұл дегеніміз WVD, WVD-LCT, WVD-OLCT, WOL арқылы сигналды анықтай аламыз дегенді білдіреді. Алайда, осы 2D суреттердегі түзу сызықтар жыпылықтаған сызық екенін оңай көруге болады. Бұның себебі сигналдың нақты және жорамал бөліктері бар болуында.

Енді WVD-LCT мен WVD-OLCT-дің нәтижелерін салыстыралық. WVD-LCT мен WVD-OLCT-дің айырмашылығы u_0 мен ω_0 параметрлерінде ғана болғандықтан да нәтижелерінде кішігірім айырмашылық бар, бірақ айқын айырмашылық жоқ. Дегенмен, WVD-OLCT екі артық параметрлерінің көмегімен уақыт пен жиіліктің ауысуын ескереді. Енді, толық масштабтаумен берілген 2D (3-сурет, 7-сурет, 11-сурет, 15-сурет) және 3D (5-сурет, 9-сурет, 13-сурет, 17-сурет) суреттерде амплитудаларға көңіл аударайық:

- Сигналды WVD-LCT мен WVD-OLCT арқылы анықтау кезінде амплитуда 450 шамасында;
- Сигналды WVD арқылы анықтау кезінде амплитуда 1100 екенін көре аламыз;
- Сигналды WOL арқылы анықтау кезінде амплитуда 2200 екенін және осы төрт түрлендіру арасында ең үлкен нәтиже екенін көреміз.

Бұл дегеніміз WVD, WVD-LCT, WVD-OLCT-дің импульс туғызатын энергисы WOL-ден аз, яғни импульс туғызатын энергисы мол құрал WOL дегенді көрсетеді. Қорыта айтсақ, WOL арқылы сигналды анықтағанда импульстің амплитудасы үлкен болады және сигналды айқын анықтауға қол жеткіземіз.

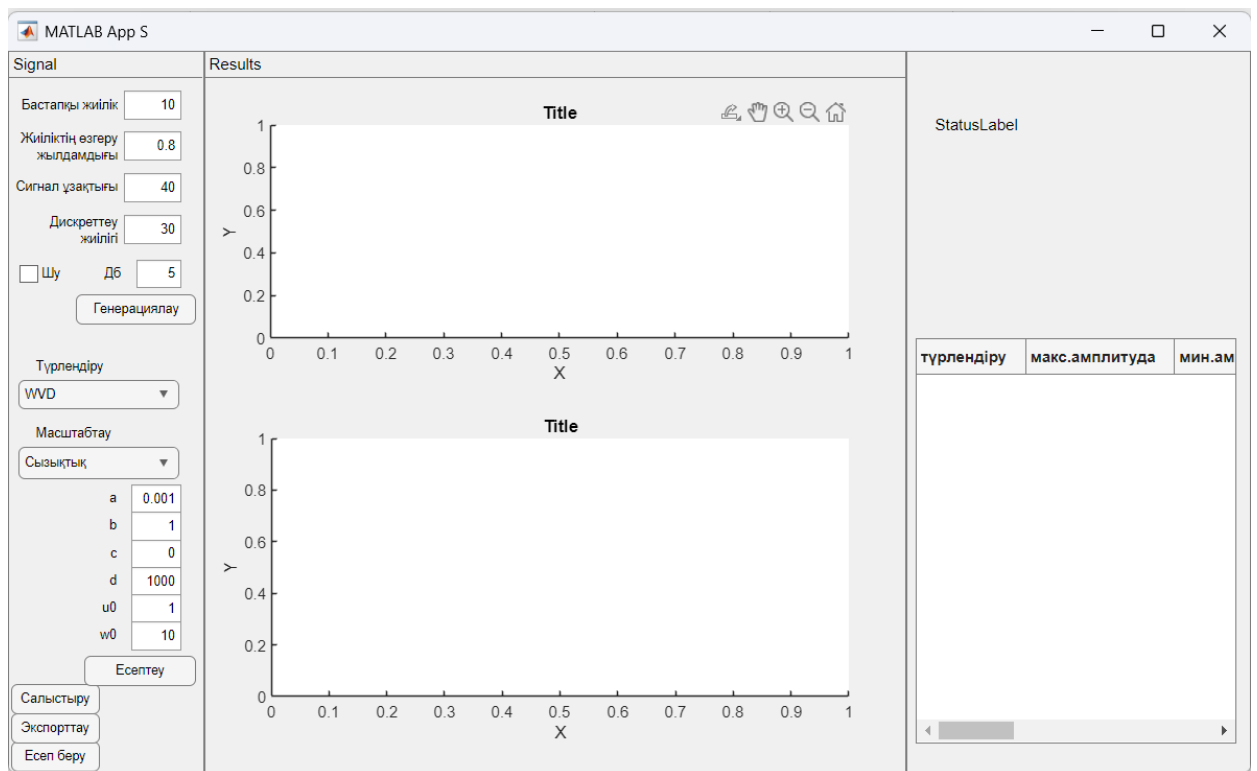
WVD, WVD-LCT, WVD-OLCT және WOL құралдарын салыстыру олардың бірегей сипаттамаларын, мүмкіндіктерін, артықшылықтарын, кемшіліктерін және қолданбаларын көрсетуге көмектеседі. 8-кестеде WVD, WVD-LCT, WVD-OLCT және WOL құралдарының салыстырмалы кестесін бердік.

4.1.4 Симуляциялар жасауға арналған қолданба

Егер (4.5) түрінде берілген және шамалары $T = 40$; $\omega_1 = 10$; $m_0 = 0.8$; $a = 0.001$; $b = 1$; $c = 0$; $d = 1000$; $u_0 = 1$; $\omega_0 = 10$ деп таңдалған бір компонентті LFM сигналының түрін және/немесе шамалардың мәнін өзгертсек қайта MATLAB бағдарламалық тіліне жүгінуіміз керек және қажетті кодтарды енгізуімізге тура келеді. Қолайлылық үшін қажетті LFM сигналды және шамаларды енгізу мүмкіндігі бар қолданбаны ұсынамыз. Бұл қолданбаның коды MATLAB бағдарламасының R2022b версиясында жазылды. MATLAB кодтарын Қосымша Г-дан көруге болады. Ұсынылып отырған қолданба MATLAB бағдарламалық тілін білмейтін зерттеушілер үшін таптырмас қолданба. Қолданбаның бастапқы бет көрінісі 19-суретте көрсетілген.

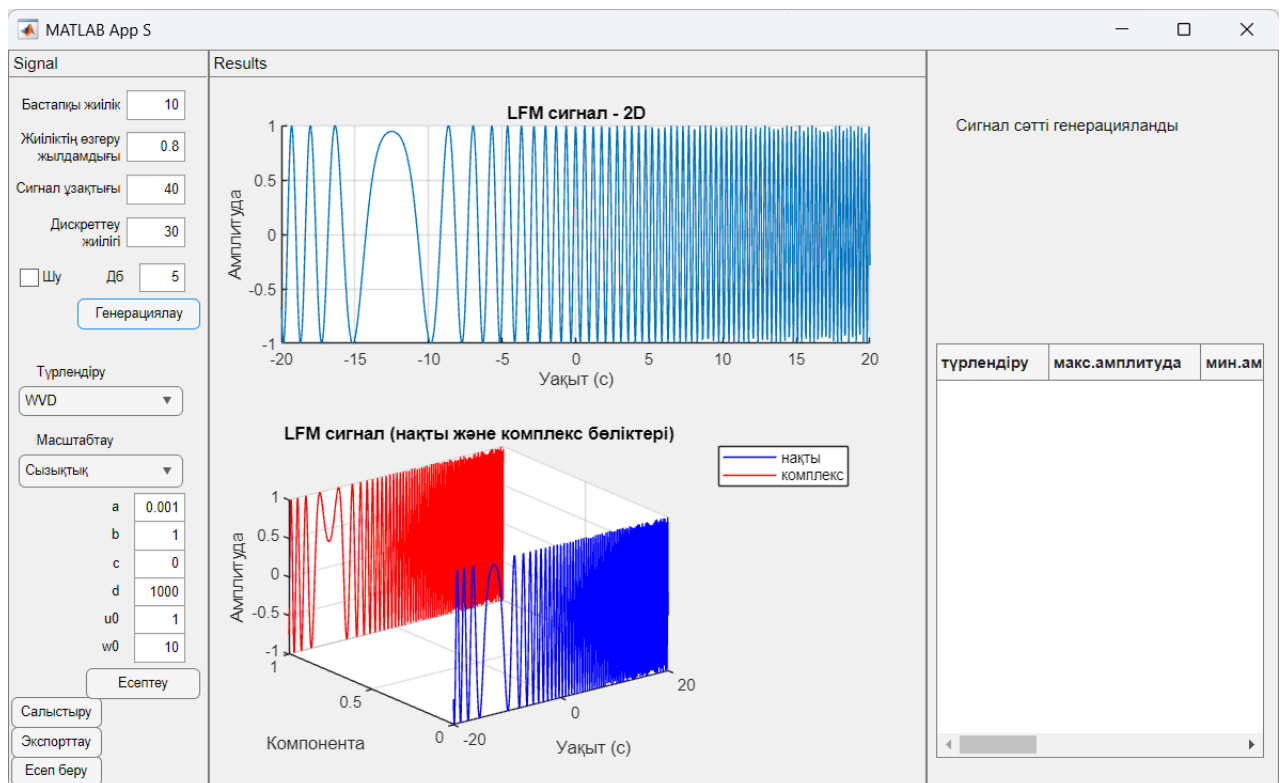
Кесте 8 – Салыстырмалы кесте

Характеристика	WVD	WVD-LCT	WVD-OLCT	WOL
Ажыратымдылығы	Жоғары	Жоғары	Жоғары	Жоғары
Икемділігі	Төмен (уақыт бойынша ығысу, масштабтау және сызықтық еместі ескермейді)	Орташа (масштабтау мен жылжуларды ескереді)	Жоғары (масштабтау мен жылжуларды және уақыт пен жиіліктің ауысуын ескереді)	Жоғары (масштабтау мен жылжуларды және уақыт пен жиіліктің ауысуын ескереді)
Бейімделуі	Төмен (өзгерістерге бейімделмейді)	Орташа (өзгерістерге жартылай бейімделеді)	Орташа (өзгерістерге жартылай бейімделеді)	Жоғары (әртүрлі сигнал сипаттамаларына бейімделеді)
Есептеу күрделілігі	Төмен	Жоғары (кернелінің кесірінен жоғары)	Өте жоғары (кернелінің кесірінен өте жоғары)	Орташа (кернелі жинақты болғандықтан орташа)
Қорытынды	Бұл жоғары ажыратымдылықты классикалық құрал, энергиясы мол, сәйкесінше амплитудасы жоғары, бірақ шуға сезімталдығы бар.	Бұл масштабтауды, аударуды және айналдыруды ескеретін, бірақ есептеу күрделілігі жоғары құрал.	Бұл масштабтау мен жылжуларды және уақыт пен жиіліктің ауысуын ескеретін, бірақ есептеу күрделілігі өте жоғары, сәйкесінше шығыны мол құрал.	Бұл масштабтау мен жылжуларды және уақыт пен жиіліктің ауысуын ескеретін, әрі энергиясы мол, сәйкесінше амплитудасы жоғары, есептеу күрделілігі орташа құрал.



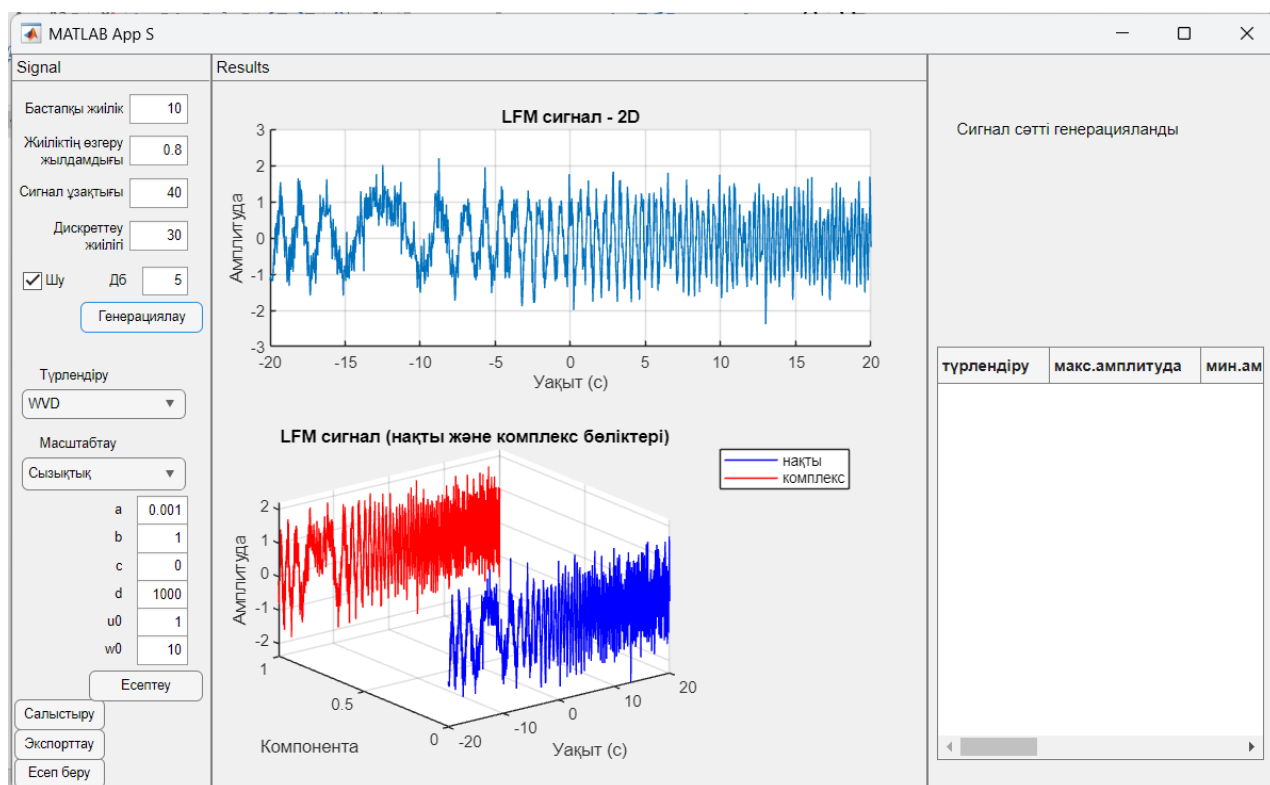
Сурет 19 – Бастапқы бет көрінісі

Бастапқы жиілікке, жиіліктің өзгеру жылдамдығына, сигнал ұзақтығына, дискреттеу жиілігіне мәндерді беріп, сигналды 20-суреттегідей генерациялаймыз:



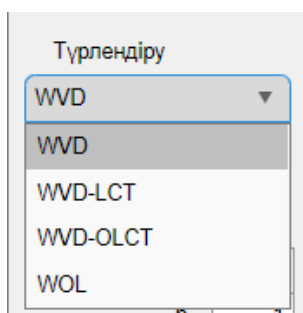
Сурет 20 – Сигналды генерациялау

Сигналды генерациялау кезінде шуды таңдауға болады. 21-суретте шуды 5 децибел деп таңдағанымызды көруге болады.



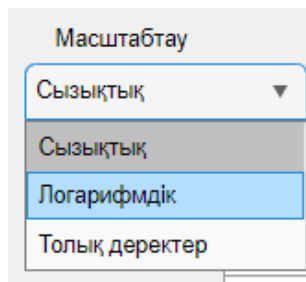
Сурет 21 – Шуды таңдау

Генерацияланған сигналдың характеристикаларын зерттеу үшін қолданба бетінің сол жағында орналасқан «Түрлендіру» атты таңдау панелінен 22-суретте көрсетілгендей түрлендірулерді қажеттігіне қарай таңдап алуымызға болады:



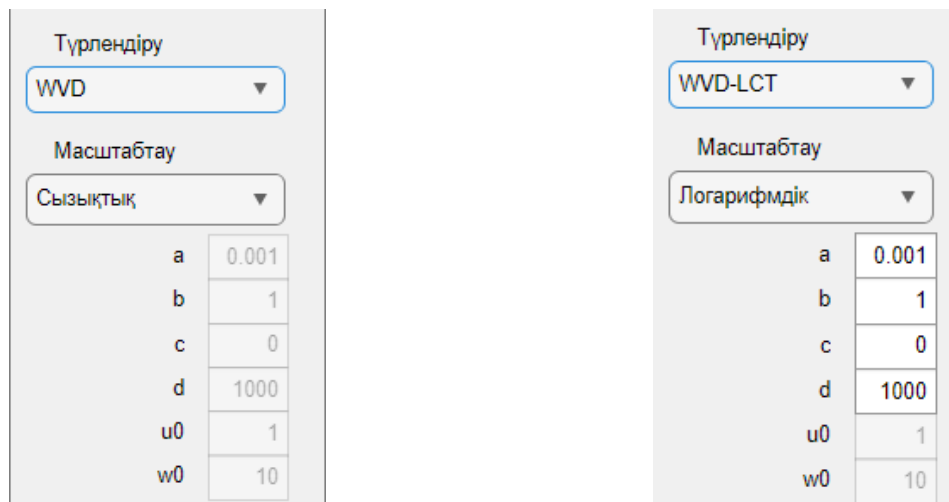
Сурет 22 – «Түрлендіру» таңдау панелі

Сонымен қатар масштабтаудың түрін таңдау арқылы 23-суретте көрсетілгендей графиктердің әртүрлі визуализациясын көре аламыз:



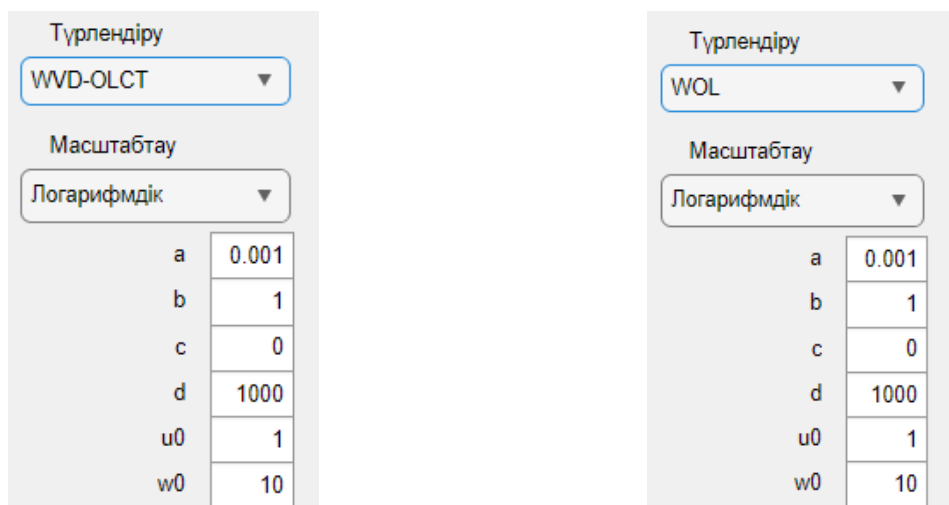
Сурет 23 – «Масштабтау» таңдау панелі

Түрлендірулерді таңдау барысында түрлендірудің сәйкес параметрлері болмаса, ондай параметрлер автоматты түрде жасырынып көрінбей қалады (24-сурет):



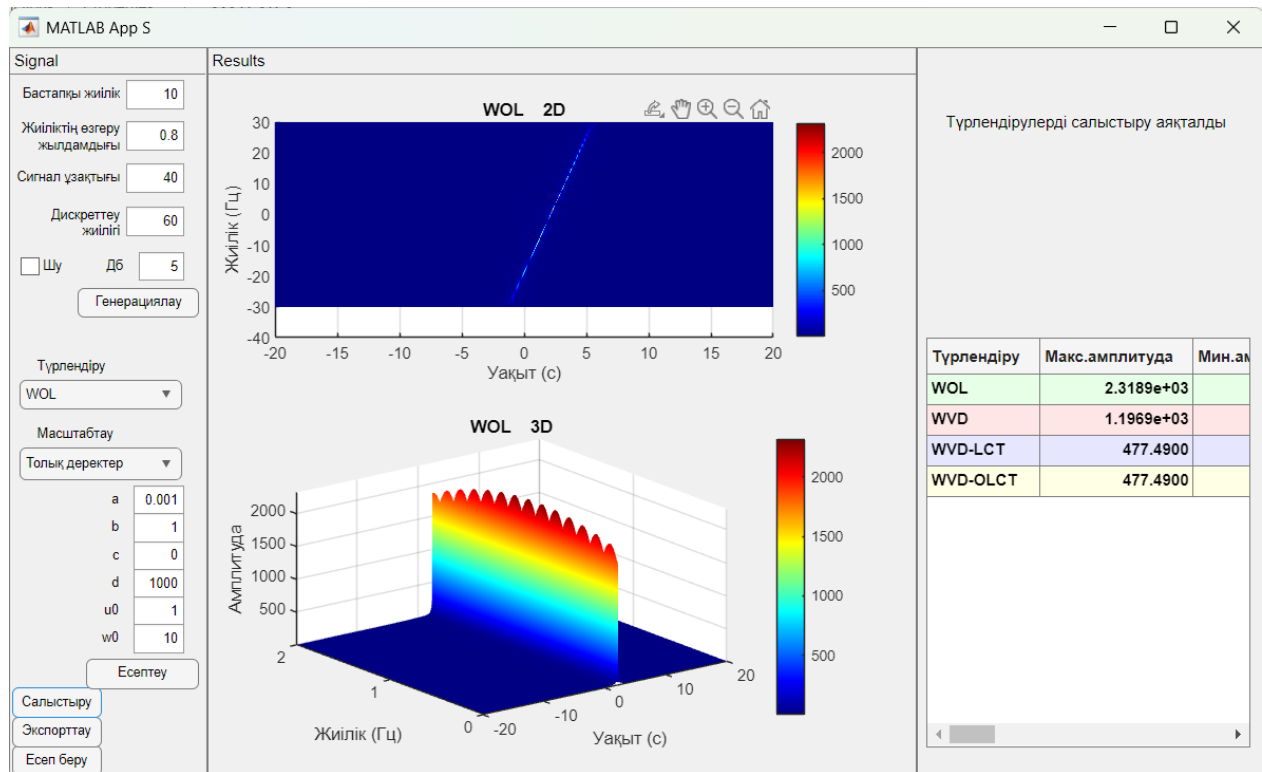
Сурет 24 – Түрлендірулердің мән беруге болмайтын параметрлері белсенді емес

Әрбір түрлендіруге сәйкес параметрлер автоматты түрде айқын байқалып, белсенді болып көрінеді, және оған өзгертіп мән беруге болады (25-сурет):



Сурет 25 – Түрлендірулердің мән беруге болатын параметрлері белсенді

Қосымшадан түрлендіруді және масштабтауды таңдау арқылы қалаған түрлендірудің 2D және 3D графиктерін алуға болады. Мысал үшін 26-суретте WOL-дың 2D және 3D графиктерін аламыз:



Сурет 26 – Түрлендірудің 2D және 3D графиктері

Алынған нәтижелерді 27-суреттегідей экспорттау арқылы әртүрлі форматтағы файлдар түрінде сақтаймыз. Салыстыру файлының бірі (excel және mat-файл):

Method	MaxAmplitude	MinAmplitude	MeanAmplitude	Energy	SNR_db	ComputationTime	Comment
WOL	2318.949432	1.88192E-07	4.43674815	6998868595	54.36453	0.2643594	Жақсартылған нұсқа. Қосымша параметрлердің (u0,w0) арқасында минималды кросс-термдер және жақсырақ анықтау
WVD	1196.881288	9.60706E-08	3.459311953	3458880000	50.781227	0.1192076	Классикалық әдіс. Таза LFM сигналдарын талдау үшін жақсы
WVD-LCT	477.4865504	3.83266E-08	1.380065799	550497850	50.781227	0.2076895	LCT-дің 4 параметрін ескереді. Тұрақты емес сигналдар үшін жақсырақ
WVD-OLCT	477.4865504	3.83266E-08	1.380065799	550497850	50.781227	0.2164435	Ауыстыруларды қосады. Ауыстырулар болған кезде тиімді

Method	MaxAmplitude	MinAmplitude	MeanAmplitude	Energy	SNR_db	ComputationTime	Comment
{'WOL'}	2318.9	1.8819e-07	4.4367	6.9989e+09	54.365	0.24423	"Жақсартылған нұсқа. Қосымша параметрлердің (u0,w0) арқасында минималды кросс-термдер және жақсырақ анықтау"
{'WVD'}	1196.9	9.6071e-08	3.4593	3.4589e+09	50.781	0.13706	"Классикалық әдіс. Таза LFM сигналдарын талдау үшін жақсы"
{'WVD-LCT'}	477.49	3.8327e-08	1.3801	5.505e+08	50.781	0.20594	"LCT-дің 4 параметрін ескереді. Тұрақты емес сигналдар үшін жақсырақ"
{'WVD-OLCT'}	477.49	3.8327e-08	1.3801	5.505e+08	50.781	0.22272	"Ауыстыруларды қосады. Ауыстырулар болған кезде тиімді"

Сурет 27 – Нәтижелерді сақтау

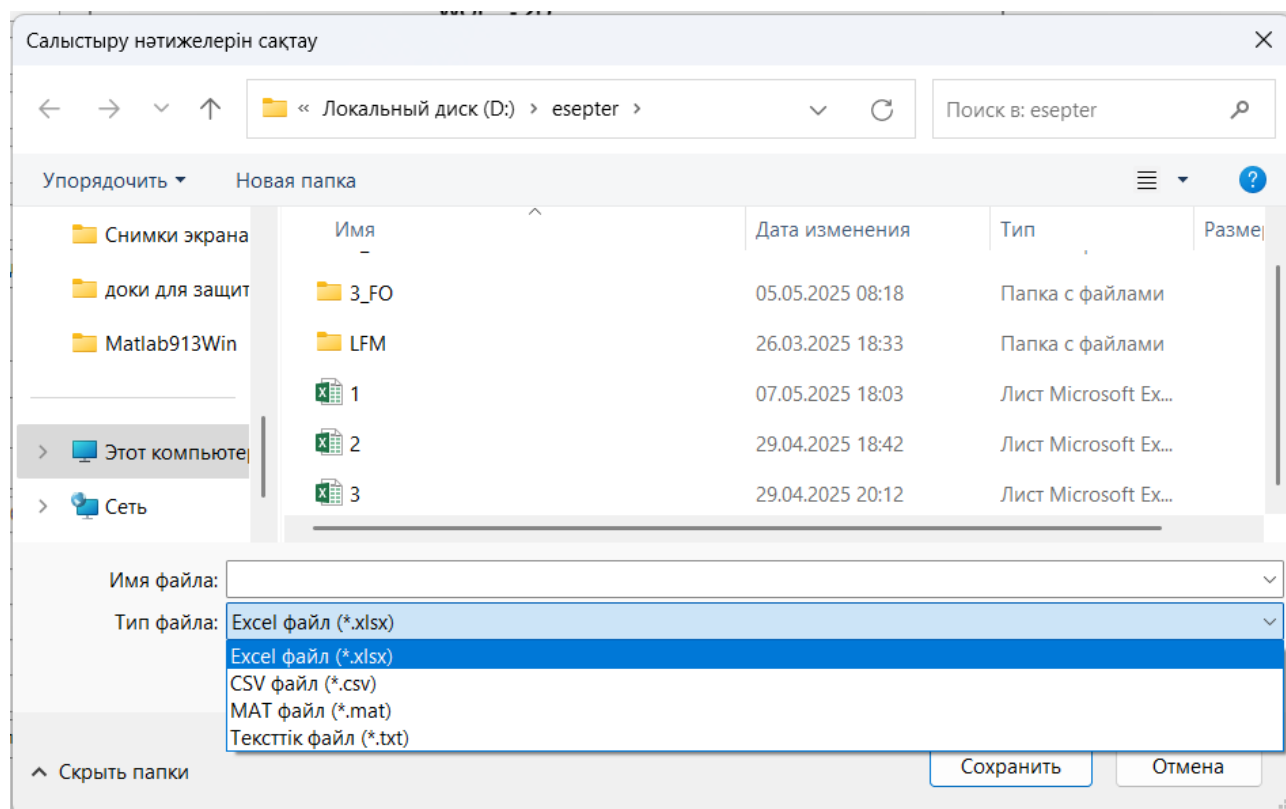
Салыстыру кестесінен энергиясы үлкен мәнге ие болған түрлендіруді көре аламыз (28-сурет):

Түрлендірулерді салыстыру аяқталды

Түрлендіру	Макс.амплитуда	Мин.ам
WOL	2.3189e+03	
WVD	1.1969e+03	
WVD-LCT	477.4900	
WVD-OLCT	477.4900	

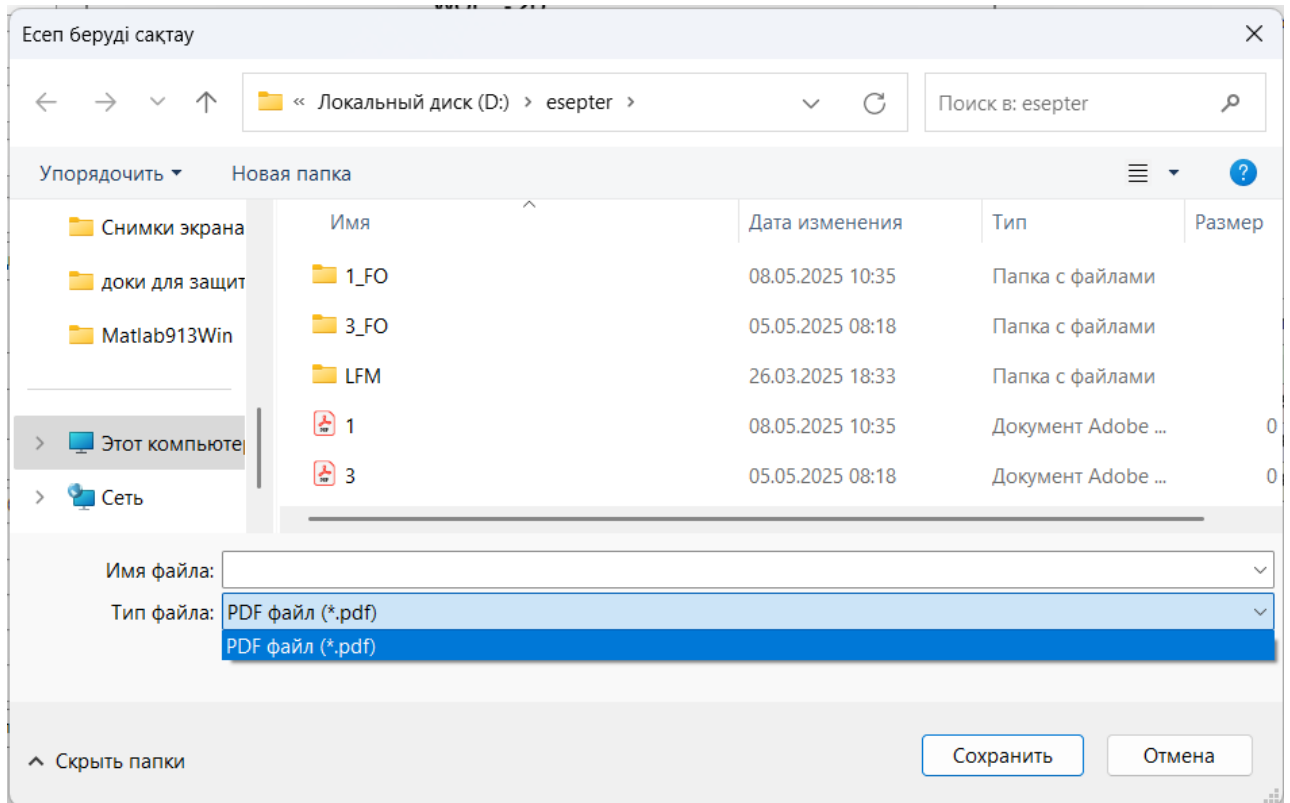
Сурет 28 – Салыстыру кестесі

29-суретте көрсетілгендей салыстыру кезінде алынған нәтижелерді әртүрлі форматтағы файлдар ретінде сақтай аламыз:



Сурет 29 – Салыстыру нәтижелерін сақтау

Қорытынды нәтиже ретінде толық мағлұматтарды есеп беру файлынан оқи аламыз (30-сурет):



Сурет 30 – Есеп беруді сақтау

4.2 Сигналды қайта құру

Осы параграфта WOL және QR-WPT арқылы сигналды қайта құруға болатындығын көрсетеміз.

4.2.1 WOL арқылы сигналды қайта құру

OLCT және WOL анықтамаларын пайдаланып, төмендегідей жаза аламыз

$$\sqrt{\frac{1}{i2\pi b}} e^{i\frac{d}{2b}u_0^2} e^{\frac{i}{2b}(-2u(du_0-b\omega_0)+du^2)} \mathcal{WOL}_f(t,u) = [\mathcal{O}_A\{h(t,\tau)\}](t,u), \quad (4.6)$$

демек

$$\begin{aligned} h(t,\tau) &= [\mathcal{O}_{A^{-1}}\mathcal{O}_A\{h(t,\tau)\}](t,u) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1}{i2\pi b}} e^{i\frac{d}{2b}u_0^2} e^{\frac{i}{2b}(-2u(du_0-b\omega_0)+du^2)} \times \\ &\quad \times \mathcal{WOL}_f(t,u) \sqrt{\frac{i}{2\pi b}} e^{-i\frac{d}{2b}u_0^2} e^{-\frac{i}{2b}(a\tau^2+2\tau(u_0-u)-2u(du_0-b\omega_0)+du^2)} du. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ал $t = \frac{\tau}{2}$ десек, онда

$$f(\tau) \overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi b} \int_{\mathbb{R}^2} R_f(t, \tau) d\tau du. \quad (4.8)$$

Бұл теңдеу $f(t)$ сигналын WOL арқылы қайта құруға болатындығын көрсетеді.

4.2.2 QR-WPT арқылы сигналды қайта құру

Кез-келген $f \in L^2(\mathbb{R})$ сигналды QR-WPT-ден қайта құруға болады [92]

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t) d\xi d\beta. \quad (4.9)$$

Дәлелдеуі. $h(t), \psi, \phi \in L^2(\mathbb{R})$ болсын. Егер $(\phi, \psi) \neq 0$ және ψ_α терезе функция болса, онда (1.3) формуласы WFT кері функциясы бойынша

$$h(t) = \frac{b}{2\pi(\phi, \psi)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{\psi^\mu}\{h\}(b\xi, \beta) e^{-ibt\xi} \psi_\alpha(t - \beta) d\xi d\beta. \quad (4.10)$$

(3.14) формуласын жоғарыдағы теңдеуге қолдансақ, төмендегіні аламыз

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} e^{i(2at^2 + 2dt)} f(t) &= \frac{b}{2\pi(\phi, \psi)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta)} e^{-ibt\xi} \times \\ &\times \psi_\alpha(t - \beta) \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) d\xi d\beta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

бұдан

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\frac{bi}{2\pi}} \frac{1}{(\phi, \psi)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(c\xi^2 + e\xi - a\beta^2 - d\beta + 2dt + bt\xi + 2at^2)} \times \\ &\times \psi_\alpha(t - \beta) \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) d\xi d\beta = \\ &= \frac{1}{(\phi, \psi)} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t) \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) d\xi d\beta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Мінсіз қайта құру үшін $(\phi, \psi) = 1$ деп алсақ, онда жоғарыдағы (4.13) теңдеуі мынаған келеді

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_f^\mu(\xi, \beta, \alpha) \psi_{\xi, \beta, \alpha}^\mu(t) d\xi d\beta, \quad (4.14)$$

және бұл дәлелдеуді аяқтайды.

4.3 Гибридті құралдардың пайдаланылу сценарийлері

Төменде осы диссертациялық жұмыста алынған нәтижелердің нақты салалардағы пайдалану сценарийлерін сипаттап жаздық:

Биомедицинадағы пайдаланылу сценарийлері: Нейрондар – мидың және жүйке жүйесінің негізгі бірліктері. Нейрондар электрлік сигналдар арқылы ақпарат жеткізіп, дене қызметін, ойлау процесін, эмоцияларды басқарады. Нейрондар денеге электрлік импульстерді жіберіп, ақпарат тасымалдайды. Нейрондар және олардың сигналдары тыныс алу, ойлау, есте сақтау, рефлексдер сияқты барлық процестерді басқарады. Қарапайым тілмен айтсақ, ми және жұлын арқылы денемізге сигнал жіберу арқылы денемізді қозғалта аламыз. Жүріп-тұруымыз, ең азы көзімізді ашып-жұму, дем алу сияқты қозғалыстар мидың денемізге сигнал жіберуі арқылы жүзеге асырылады. Нейрондық сигналдардың бұзылуы Паркинсон, Альцгеймер, эпилепсия сияқты ауруларға әкелуі мүмкін. Осы және т.б. ауруларды зерттеу барысында мидағы сигналдарды анықтау керек, анықтау үшін құрал қажет және ол құрал сигналды айқын анықтайтындай болуы қажет. Мысалы: эпилепсиямен ауыратын науқастарда ұстамалардың (приступ) басталуына себеп болатын қозуды тудыратын ми аймағындағы эпилепсия ошағын, яғни мидағы электр белсенділігі бар аймақты, сигналдарды анықтау қажет. Комадағы науқастардың жағдайын бағалау үшін де мидағы сигналдарды анықтау қажеттігі туындайды. Кей кездерде классикалық WVD сияқты құралдарды қолданып сигналды анықтағанда сигнал әлсіз не сигналдың импульсі аз болғандықтан сигналды анықтау қиындыққа соғады. Қазіргі заманда мидағы электрлік белсенділікті тіркейтін диагностикалық әдіс – электроэнцефалография (ЭЭГ) негізінде классикалық түрлендірулер қолданылады. Симуляцияда көрсетілгендей басқа түрлендірулермен салыстырғанда WOL-мен сигналды анықтаған кезде импульстің амплитудасы үлкен болады, яғни сигналды айқын анықтай аламыз.

Жүрек бұлшықеті электрлік импульстар арқылы жұмыс істейді. Қазір көптеген смарт құрылғылар бар. Соның бірі жүрек соғысын анықтайтын смарт сағаттар. Осындай смарт құрылғылардың жүрек соғысын анықтаудағы сезімталдығын гибридті түрлендірулер арқылы арттыруға болады деп сенеміз.

Әскери саладағы пайдаланылу сценарийлері: Шайқас басталмас бұрын қарсыластың (жаудың) әуе, теңіз және құрлықтағы нысандарды анықтау қажет. Қарсыласты анықтау = сигналды анықтау әскери операцияларда өте маңызды. Қарсыластың радарларын немесе байланысын бұғаттау немесе жаңылыстыруды жүзеге асырудың алдындағы алғашқы қадамы байланыс және радиолокациялық сигналдарын анықтау болып табылады. Соның ішінде, қарсыластың радио және электрондық байланыс сигналдарын «ұстап», жалпақ тілде сигналдарды «ловить» ету, яғни сигналдарды анықтау қажет. Қарсылас сигналдарын бұғаттаса, сигналдардың импульсінің амплитудасы аз болып сигналды анықтау қиын болады. Түскен сигналды қайта құру да қажет болады. Сонар жүйесі

арқылы суасты кемелерді және торпедаларды нақты анықтау қажет. Әуе кеңістігіміздегі қарсыластың ұшағын не дронын нақтылықпен анықтау қажет. Кибершабуылдардан қорғану үшін аномалдарды анықтар алдында сигналдардың барлығын анықтау керек. Осындай әскери саладағы сигналдарды анықтау, қайта құру сияқты қолданбаларда осы диссертациялық жұмыста баяндалған гибридті түрлендірулерді пайдалануға болады.

Жер тербелістері мен сейсмикалық толқындардың таралуын зерттейтін ғылым саласында пайдаланылу сценарийлері: Табиғи жер сілкінісі немесе жанартау атқылауы не болмаса жасанды жарылыстар кезінде пайда болатын сейсмикалық сигналдарды анықтау жер сілкіністерін, тау жыныстарының қозғалысын және табиғи апаттарды зерттеуге көмектеседі. Ал сигналды қайта құру қолданысы алынған деректерді өңдеп, жер асты құрылымдарының нақты моделін жасауға мүмкіндік береді. Қазіргі таңда сейсмикалық сигналдар классикалық FT, WT түрлендірулер арқылы зерттеледі. Ал біз осы диссертациядағы дәлелденген теория мен көрсетілген симуляцияға сүйеніп WOL, QP-WPT гибридті түрлендірулерімен зерттеу әлдеқайда жақсырақ деп санаймыз. Оған қоса жоғары өлшемді сигналдарды QFrFT арқылы зерттеуге болады деген ойдамыз.

Төртінші бөлім бойынша тұжырымдар

Осы бөлімде гибридті түрлендірулердің қолданыстары көрсетілді. Бір компонентті және екі компонентті LFM сигналдарын WOL арқылы анықтауға болатындығы дәлелденді. Содан соң, WVD, WVD-LCT, WVD-OLCT және WOL құралдарымен бір компонентті LFM сигналын анықтау бойынша симуляция жүргізілді және аталған құралдардың мүмкіндіктерін, яғни артықшылықтары мен кемшіліктерін айқындайтын салыстырмалы кесте берілді. Мұнда ажыратылымдылық, икемділік, бейімделгіштік және есептеу күрделілігі сияқты характеристикалар салыстырылды және аталған төрт құрал ішінде WOL нәтижелерімен озды. Басқа да симуляциялар жасау үшін MATLAB бағдарламалық тілін пайдаланып, арнайы қолданба жасап шығардық. Бұл қолданба арқылы сигналды генерациялауға болады, параметрлерге қалаған мәндерді беріп, нәтижелерді көруге және оны сақтауға, салыстыруға және есеп беру файлын алуға болады.

Анықтаудан бөлек WOL арқылы сигналды қайта құруға болатындығы сипатталған, әрі сигналды QP-WPT арқылы да қайта құруға болатындығы көрсетілген. Бөлім соңында гибридті құралдардың бірнеше пайдаланылу сценарийлері берілген.

5 Кватернион бөлшек Фурье түрлендіруі (QFrFT)

5.1 QFrFT конвульсиясы

Конвульсия (свертка) — сигналдарды талдау, сүзу және түрлендіру үшін қолданылатын операция. Конвульсия үш сигналды байланыстырады: кіріс сигналы, шығыс сигналы және импульстік жауап. Конвульсия сигналды өңдеуде, атап айтқанда сигналдарды сүзуде қолданылады. Мысалы: аудиосигналдан шуды жою. Жүйелерді талдауда да пайдаланылады. Мысалы: сызықтық уақыт бойынша инвариантты жүйелерде (линейные стационарные системы, linear time-invariant systems (LTI systems)) жүйенің шығыс сигналы кіріс сигналы мен жүйенің импульстік сипаттамасының конвульсиясы болып табылады. Конвульсиялық нейронды желілерде (сверточные нейронные сети, convolutional neural network (CNN)) де қолданылады. Мысалы: машиналық оқытуда (машинное обучение) конвульсия суреттерден, аудиодан немесе басқа деректерден белгілерді немесе ақпаратты алу үшін қолданылады. Одан басқа спектрлік талдау, компьютерлік көру (компьютерное зрение) сияқты көптеген салаларда маңызды рөл атқарады. Төменде конвульсияны есептеуге арналған Python кодының мысалы:

```
# Сигнал және импульстік сипаттама
x = np.array([1, 2, 3])
h = np.array([1, 1])

# Конвульсия
y = np.convolve(x, h)
print(y) # Нәтиже: [1, 3, 5, 3]
```

QFrFT-дің қолданыстарын күшейту үшін оның конвульсиясын зерттеу қажеттілігі туындап тұр. Алдымен 1D QFrFT үшін төмендегі конвульсия анықтамасын береміз. Кейін осы анықтаманы пайдаланып 1D QFrFT үшін конвульсия теоремасын анықтаймыз.

Анықтама 5.1.1 (1D QFrFT үшін кватернион конвульсия). $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{H})$ және $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{H})$ сигналдарының $\mathcal{F}_\beta(u)$ 1D QFrFT-нің $(f * g)_\beta$ конвульсиясы мына түрде анықталады [89]

$$(f * g)_\beta(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g_\beta(t - y) dy, \quad (5.1)$$

мұндағы $g_\beta(t)$ — β параметрі бар $g(t)$ сигналының 1D QFrFT-і.

Бұл анықтама классикалық конвульсия операциясын 1D QFrFT контекстіндегі кватерниондық сигналдарға кеңейтеді.

Теорема 5.1.1 (Конвульсия теоремасы). $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{H})$ және $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{H})$ үшін төмендегі орындалады [89]

$$\mathcal{F}_\beta(f *_\beta g)(u) = \mathcal{F}_\beta(f)(u) \mathcal{F}_\beta(g)(u) e^{-i\beta u^2}, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Дәлелдеуі. Кез-келген $u \in \mathbb{R}$ үшін

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\beta(f *_\beta g)(u) &= \mathcal{F}_\beta(f_1 * g_1 - \mathcal{F}_{-2\beta}(f_2) * g_2)(u) + j \mathcal{F}_\beta(f_2 * g_1 + \mathcal{F}_{-2\beta}(f_1) * g_2)(u) \\ &= \mathcal{F}_\beta(f_1)(u) \mathcal{F}_\beta(g_1)(u) e^{-i\beta u^2} - \mathcal{F}_\beta(\mathcal{F}_{-2\beta}(f_2))(u) \mathcal{F}_\beta(g_2)(u) e^{-i\beta u^2} \\ &\quad + j \left(\mathcal{F}_\beta(f_2)(u) \mathcal{F}_\beta(g_1)(u) e^{-i\beta u^2} + \mathcal{F}_\beta(\mathcal{F}_{-2\beta}(f_1))(u) \mathcal{F}_\beta(g_2)(u) e^{-i\beta u^2} \right) \\ &= \left(\mathcal{F}_\beta(f_1)(u) \mathcal{F}_\beta(g_1)(u) - \mathcal{F}_\beta(\mathcal{F}_{-2\beta}(f_2))(u) \mathcal{F}_\beta(g_2)(u) \right) e^{-i\beta u^2} \\ &\quad + j \left(\left(\mathcal{F}_\beta(f_2)(u) \mathcal{F}_\beta(g_1)(u) + \mathcal{F}_\beta(\mathcal{F}_{-2\beta}(f_1))(u) \mathcal{F}_\beta(g_2)(u) \right) \right) e^{-i\beta u^2} \\ &= \left(\mathcal{F}_\beta(f_1)(u) \mathcal{F}_\beta(g_1)(u) - \mathcal{F}_{-\beta}(f_2)(u) \mathcal{F}_\beta(g_2)(u) \right) e^{-i\beta u^2} \\ &\quad + j \left(\left(\mathcal{F}_\beta(f_2)(u) \mathcal{F}_\beta(g_1)(u) + \mathcal{F}_{-\beta}(f_1)(u) \mathcal{F}_\beta(g_2)(u) \right) \right) e^{-i\beta u^2} \\ &= \mathcal{F}_\beta(f)(u) \mathcal{F}_\beta(g)(u) e^{-i\beta u^2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Осылайша, теорема дәлелденді.

Тұрақтылықтың сақталуы екі сигналдың 1D QFrFT конвульсиясы олардың жеке түрлендірулерінің көбейтіндісіне эквивалентті екенін көрсету арқылы көрсетіледі.

5.2 Ықтималдық теориясындағы QFrFT

Ықтималдықтар теориясы мен кватернион алгебрасының бұл интеграциясы QFT шектеулерін шешу кезінде теориялық негіздерді байытады. 1D QFrFT сигналды талдаудың икемділігін арттырып қана қоймайды, сонымен қатар пәнаралық синергияны дамытады. Бұл байланыс көп өлшемді сигнал талдауына негізделген, инновацияларды ынталандыратын және күрделі сигналдарды өңдеу мен интерпретациялау туралы жаңа түсініктерді қамтамасыз ететін практикалық қолданбалардың құлыпін ашады. Сигналдарды өңдеу мен ықтималдық теориясы арасындағы алшақтықты жою арқылы 1D QFrFT қолданбалы салаларда жаңа мүмкіндіктерді аша отырып, кватерниондық талдауда трансформациялық құрал ретінде танылмақ.

$f_x(x)$ кватернион мәнді ықтималдық тығыздық функциясы (плотность вероятности probability density function) (PDF) келесі шарттарды қанағаттандырады:

- 1) Позитивтік: $f_a^x(x) \geq 0, f_b^x(x) \geq 0, f_c^x(x) \geq 0, f_d^x(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Нормализация

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1, \quad (5.4)$$

мұндағы интеграл құрамдас, яғни,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a^x(x)dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f_b^x(x)dx + j \int_{-\infty}^{\infty} f_c^x(x)dx + k \int_{-\infty}^{\infty} f_d^x(x)dx = 1. \quad (5.5)$$

$f_x(x)$ – ке 1D QFrFT қолданылғанда, $\mathcal{F}_\beta(f_x)(u)$ нәтиже түрлендіруі QFrFT параметрінің β мәніндегі кватернион-мәнді сигналдың жиілік аймағының көрінісін түсіреді (фиксирует). $f_x(x)$ – тің 1D QFrFT келесідей анықталады

$$\mathcal{F}_\beta(f_x)(u) = \int_{\mathbb{R}} f_x(u) K_\beta(x, u) dx, \quad (5.6)$$

мұндағы $K_\beta(x, u)$ – β параметріне тәуелді 1D QFrFT кернелі.

$f_x(x)$ – ті құрамдас бөліктері бойынша өрнектеп, жаза аламыз

$$\mathcal{F}_\beta(f_x)(u) = \sum_{\alpha=a,b,c,d} e_\alpha \int_{\mathbb{R}} f_\alpha^x(x) K_\beta(x, u) dx, \quad (5.7)$$

мұндағы e_α сәйкесінше 1, i , j , және k , кватернион бірліктері;

$f_\alpha^x(x)$ – $f_x(x)$ – тің скаляр компоненттері.

Анықтама 5.2.1. $F_x(x)$ кватернион кумулятивтік таралу функциясы (функция распределения, cumulative distribution function) (CDF) $\mathcal{F}_\beta(u)$ 1D QFrFT үшін x – ке қатысты $F_x(x)$ кватернион CDF-тің туындысы ретінде көрсетілуі мүмкін [89]

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x), \quad (5.8)$$

мұндағы P ықтималдығы $F_x(x)$ – пен төмендегі формула арқылы байланысты

$$F_x(x) = P(X \leq x). \quad (5.9)$$

CDF-ге 1D QFrFT қолдансақ, келесі теңдікті аламыз

$$\mathcal{F}_\beta[F_x](u) = \int_{\mathbb{R}} F_x(x) K_\beta^j(x, u) dx, \quad (5.10)$$

мұндағы $K_\beta^j(x, u)$ – 1D QFrFT кернелі.

1D QFrFT облысындағы сәйкес PDF-ті $\mathcal{F}_\beta[F_x](u)$ – ті x – ке қатысты дифференциациялау арқылы табуға болады.

$$\mathcal{F}_\beta[f_x](u) = \frac{d}{dx} \mathcal{F}_\beta[F_x](u). \quad (5.11)$$

Анықтама 5.2.2 (Күтілетін мән (ожидаемое значение, expected value)). 1D QFrFT үшін күтілетін мән төмендегі арқылы беріледі [89]

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \mathcal{F}_{f_x}^\beta(u) du, \quad (5.12)$$

мұндағы $\mathcal{F}_{f_x}^\beta(u) - f_x(x)$ PDF-тің 1D QFrFT-i.

1D QFrFT-де күтілетін мән кездейсоқ шаманың жиілік облысындағы әрекетінің жалпыланған көрінісін қамтамасыз ете отырып, бөлшектік Фурье реттері бойынша X үлестіруін көрсетеді.

Анықтама 5.2.3 (Орташа мән (среднее значение, the mean)). 1D QFrFT контекстіндегі кватернион мәнді X кездейсоқ шамасының орташа мәні дәстүрлі орташа мәнге ұқсас анықталады, бірақ ол бөлшек Фурье доменінің сипаттамаларын қамтиды. $f_x(x)$ кватернион PDF-ы бар кватернион мәнді X кездейсоқ шамасының 1D QFrFT-дегі орташа мәні [89]

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \mathcal{F}_{f_x}^\beta(u) du, \quad (5.13)$$

мұндағы $\mathcal{F}_{f_x}^\beta(u)$ дегеніміз $f_x(x)$ PDF-тің 1D QFrFT-i.

Мысал. Кватернион PDF төмендегідей берілген

$$f_x(x) = 1 + j \cdot 0,5, \quad (5.14)$$

(5.14) теңдігі $x \in [0,1]$ үшін орындалады, қалған жағдайлар үшін 0-ге тең.

Анықтама 5.2.2-дегі (5.12)-ні пайдаланып, нақты бөліктің күтілетін мәнін былай есептейміз

$$\mathbb{E}[X_a] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

X_b және X_c жорамал бөліктерінің күтілетін мәні нөлге тең

$$\mathbb{E}[X_b] = \mathbb{E}[X_c] = 0. \quad (5.16)$$

X_d жорамал бөлігінің күтілетін мәні

$$\mathbb{E}[X_d] = \int_0^1 0,5 \cdot x dx = 0,25. \quad (5.17)$$

Осылайша, соңғы күтілетін мән

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} + 0,25k. \quad (5.18)$$

1D QFT, 1D QLCT және 1D QFrFT шолу және олардың ықтималдықтар теориясындағы рөлдері 9-кестеде көрсетілген.

Бесінші бөлім бойынша тұжырымдар

Конвульсияның қолдану аясы кең, атап айтқанда, сигналдарды сүзуде, спектрлік талдау, LTI жүйелерінде, CNN желілерінде, т.б. қолданылады. Осы бөлімде көп өлшемді сигналдар мен кескіндерді зерттеу үшін арналған құрал QFrFT-дің конвульсиясын бердік. Оған қоса QFrFT үшін негізгі ықтималдық тұжырымдамаларды, соның ішінде сипаттамалық функцияны, күтілетін мәнді, ықтималдық тығыздығының функциясын және дисперсияны зерттедік. Бұл нәтижелер сигналды өңдеудің озық әдістерін қажет ететін салаларда зерттеулер мен қолданудың жаңа мүмкіндіктерін ұсына отырып, кватернион контексінде ықтималдықтар теориясының дамуын жақсарту үшін 1D QFrFT әлеуетін көрсетеді.

Кесте 9 – Ықтималдық теориясындағы 1D QFT, 1D QLCT және 1D QFrFT

	1D QFT	1D QLCT	1D QFrFT
	$\mathcal{F}[f(t)](u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-jut} dt$	$\mathcal{Q}_A[f(t)](u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)K_A^j(t,u) dt$	$\mathcal{F}_\beta[f(t)](u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)K_\beta^j(t,u) dt$
CDF	$F_X(x) = P(X \leq x)$	$F_X(x) = P(X \leq x)$	$F_X(x) = P(X \leq x)$
PDF	$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$	$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$	$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$
Күтілетін мән	$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x) dx$	$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x) dx$	$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x) dx$
Дисперсия (variance)	$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$	$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$	$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
Характеристи- калық функция	$\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \mathcal{F}[f_X](u)$	$\varphi_X(u) = \mathcal{Q}_A[f_X](u)$	$\varphi_X(u) = \mathcal{F}_\beta[f_X](u)$
Конвульсия	$\mathcal{F}[f * g](u) =$ $= \mathcal{F}[f](u)\mathcal{F}[g](u)$	$\mathcal{Q}_A[f * g](u) =$ $= \mathcal{Q}_A[f](u)\mathcal{Q}_A[g](u)$	$\mathcal{F}_\beta[f * g](u) = \mathcal{F}_\beta[f](u)\mathcal{F}_\beta[g](u)$
Энергияны сақтау (Планчерель)	$\int_{\mathbb{R}} f(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(u)] ^2 du$	$\int_{\mathbb{R}} f(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{Q}_A[f(u)] ^2 du$	$\int_{\mathbb{R}} f(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\beta[f(u)] ^2 du$
Ескерту – Кестені автор [89] дереккөзі бойынша құрастырған.			

ҚОРЫТЫНДЫ

Осы диссертациялық жұмыс гибриді түрлендірулер бойынша зерттеулерді жүргізді және негізінен OLCT-дың артықшылықтары мен WVD қасиеттерін толықтай қамтитын WOL-ды қарастырды. Бұл WVD-OLCT және WVD-ге қарағанда қарапайым сигнал өңдеуге арналған құрал. Біз осы жұмыста WOL-дың кейбір негізгі қасиеттерін, соның ішінде маргинал қасиеттерін, жылжу қасиеттерін, Моял формуласын және анықталмағандық принципін талқыладық. Сонымен қатар, лездік жиілікті есептеудің жаңа әдісі сипатталды. Жаңадан ұсынылған гибриді түрлендірудің, яғни WOL-дың бірнеше қолданыстары да егжей-тегжейлі көрсетілген:

- WOL арқылы сигналды қайта құруға болатындығы көрсетілді;
- Бір компонентті және екі компонентті LFM сигналдарын WOL арқылы анықтауға болатындығы дәлелденді;
- WVD, WVD-LCT, WVD-OLCT және WOL құралдарымен бір компонентті LFM сигналын анықтау бойынша симуляция жүргізілді;
- Аталған құралдардың мүмкіндіктерін, яғни артықшылықтары мен кемшіліктерін айқындайтын салыстырмалы кесте берілді.

Бұдан бөлек, басқа да симуляциялар жасау үшін MATLAB бағдарламалық тілін пайдаланып, арнайы қолданба жасап шығардық. Бұл қолданба төмендегідей функцияларға ие:

- сигналды генерациялауға болады;
- параметрлерге қалаған мәндерді беріп, қалауымызша өзгертуге болады;
- түрлендірулердің нәтижелерін 2D және 3D графиктерінде көруге болады;
- нәтижелерді қалаған форматта сақтауға мүмкіндік бар;
- нәтижелер салыстырылған кестені көруге болады;
- есеп беру файлы алуға болады.

QPFT және классикалық WPT теориясы негізінде біз осы диссертацияда WPT және QPFT шектеулерін (кемшіліктерін) түзететін QR-WPT атты сигналды өңдеудің жаңа құралын ұсындық. Тұтастай алғанда, ол QPFT және WPT артықшылықтарын біріктіріп қана қоймайды, сонымен қатар оның әдеттегі аналогының қасиеттерін сақтайды және жақсырақ математикалық қасиеттерге ие. Моял формуласы, инверсия формуласы және репродуктивті кернел қасиеттерін қоса алғанда, кейбір маңызды іргелі қасиеттерді зерттеумен қатар, біз Лейбтің анықталмағандық принципі, логарифмдік анықталмағандық теңсіздігі және Гейзенберг теңсіздігі сияқты анықталмағандық теңсіздіктерінің бірнеше класстарын тұжырымдадық. Соңында, QR-WPT арқылы сигналды қайта құруға болатынын көрсеттік.

QFrFT-дің QFT-ден артықшылығы стационарлы да, стационарлық емес те процестерді өңдеуге қабілетті болуында. Қорытындылай келе, QFT теориялық негізді қамтамасыз еткенімен, QLCT және QFrFT ықтималдықтар теориясындағы кватернион сигналдар мен стохастикалық процестерді талдауда

икемдірек. Себебі QFT күтілетін мәнді тек уақыт облысында қарастыра алады, ал QLCT және 1D QFrFT күтілетін мәндері кватернион кездейсоқ шамасының таралуының әрекеті туралы қосымша түсінік береді. QLCT ауысымдар мен масштабтарға назар аударады, ал QFrFT бөлшек Фурье тәртібіне баса назар аударады. QFrFT зерттеуі қызықты және қолданбаларда келешегі зор.

Гибридті түрлендірулер сигналды анықтау және бағалау қолданбаларында жақсы нәтиже беретіні айқын. Екі түрлендіруді байланыстыру идеясы жаңа болғандықтан, ол терең теориялық талдауды қажет етеді және қазіргі таңда әртүрлі қолданбалары жоқтың қасы. Сигналдарды өңдеу саласындағы гибридті және кватернион түрлендірулердің әлеуеті зор. Сигналдарды анықтау, зерттеу заманауи ақпараттық жүйелердің ажырамас бөлігі болып табылады. Ол биомедицина, әскери қорғаныс, киберқауіпсіздік, байланыс салаларында кеңінен қолданылады.

Осы диссертация қамтыған гибридті және кватернион түрлендірулер жалпы түрде $f(t)$ 1D сигналдарды өңдеу үшін жазылған. Екі өлшемді 2D сигналдарды $f(t_1, t_2)$ өңдеу үшін, яғни кескіндер не видеоларды осы диссертацияда баяндалған гибридті және кватернион түрлендірулер арқылы зерттеу үшін бір еселі интегралды түрлендірулерді екі еселі интеграл ретінде қарастыруға болады және ол оңай қолжетімді. Сонымен қатар, $f(t)$ сигналын комплекс сигнал деп қарастыруға болады.

Қызығушылық танытқан оқырмандар кватерниондық және октониондық алгебрадағы гибридті түрлендірулерді қараса болады. Бұл зерттеулер түсті кескінді өңдеуде пайдалы болатыны сөзсіз. Сондықтан диссертациядағы зерттеу жұмыстарының нәтижелері биомедициналық сигналдар мен кескіндерді өңдеу үшін де қолдануға болады. Сонымен қатар, гибридті түрлендірулердің жүйелерде қолданысы бар болатын іріктеу теоремасын (sampling theorem, теорема отсчётов) шығаруды болашақ жұмыстар ретінде қарастыру көзделген.

Бұл диссертацияда баяндалған кейбір зерттеу жұмыстары Қазақстан Республикасының бағдарламалық құжаттарын іске асыруға бағытталған 2022-2024 жылдарға арналған ғылыми және ғылыми-техникалық жобалар бойынша іргелі және қолданбалы ғылыми зерттеулерді гранттық қаржыландыру конкурсында жеңіске жеткен *«Кватерниондық Фурье түрлендірулерін құру мен зерттеу және оларды геофизика мен геохимия мәселелерін шешу үшін ақпараттық жүйесін құруда қолдану»* атты жоба аясында сәтті жүргізілді. Конкурс атауы: Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым Министрлігі 2022-2024 жылдарға арналған ғылыми және (немесе) ғылыми-техникалық жобалар бойынша гранттық қаржыландыруға арналған конкурс; Қаржыландыру типі: Мемлекеттік фонд; Зерттеу типі/түрі: Қолданбалы; Қаржыландырудың мақұлданған сомасы: 78000000 KZT; Жобаның ЖСН №AP14871252. Жоба Қазақстан Республикасының ғылымын дамытудың басым бағытына, атап айтқанда «Ақпараттық, коммуникациялық және ғарыштық технологияларға» кіреді. Автор аталған жобаның зерттеу тобының құрамында «ғылыми қызметкер» лауазымы қызметін атқарды. Жоба *Қазақстан Республикасының*

Ұлттық Инженерлік Академиясында жүзеге асырылды. Қосымша В-да Республикалық қоғамдық бірлестік Қазақстан Республикасының Ұлттық Инженерлік Академиясының анықтамасы берілген. Толығырақ ақпаратпен Ұлттық мемлекеттік ғылыми-техникалық сараптама орталығының сайтында [156] танысуға болады.

Осы диссертациялық жұмыс арқылы ғылыми қазақ тілінің дамуына да үлес қостық деп сенеміз.

Бұл диссертациялық жұмыс Қазақстан Республикасының мемлекеттік стандарттар жүйесінің зерттеу жұмыстарына қойылатын жалпы талаптары мен ережелеріне сәйкес нормативтік сілтемелерге сүйене отырып орындалған және рәсімделген.

ПАЙДАЛАНЫЛГАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Bracewell R.N. The Fourier Transform and its Applications / Third edition. -New York: McGraw-Hill Book Co, 1986.
- 2 Goodman J.W. Introduction to Fourier Optics / 2nd edition. -New York: McGraw-Hill, 1988.
- 3 Grafakos L. Fourier Analysis / 2nd edition. -USA: Columbia, 2008.
- 4 James J F. A Student's Guide to Fourier Transforms with Applications in Physics and Engineering / 3rd edition. -United Kingdom, Cambridge, 2011.
- 5 Oppenheim A.V., Schafer R.W. Discrete-Time Signal Processing / Englewood Cliffs, Prentice-Hall. -New Jersey, 1989.
- 6 Wolf K.R. Integral Transforms in Science and Engineering / -New York and London: Plenum Press, 1979. Chapter 9, 10.
- 7 Bahri M., Zulfajar, Ashino R. Convolution and correlation theorem for linear canonical transform and properties // Information Japan. -2014. -Vol.17, №6. - P.2509-2521.
- 8 Bastiaans M.J., Alieva T. The Linear Canonical Transformation: Definition and Properties / Linear Canonical Transforms. -New York: Springer, 2016. -P.643-648.
- 9 Bultheel A., Martínez-Sulbaran H., Recent developments in the theory of the fractional Fourier and linear canonical transforms // Bull. Belg. Math. Soc. -2006. -Vol.13. -P.971-1005.
- 10 Deng B., Tao R., Wang Y. Convolution theorems for the linear canonical transform and their applications // Science in China Series F: Information Sciences. - 2006. -Vol.49, №5. -P.592-603.
- 11 Goel N., Singh K. Modified convolution and product theorem for the linear canonical transform derived by representation transformation in quantum mechanics // Applied Mathematics and Computer Science (AMCS). -2013. -Vol.23, №3. -P.685-695.
- 12 Goel N., Singh K. Modified correlation theorem for the linear canonical transform with representation transformation in quantum mechanics // Signal, Image and Video Processing. -2014. -Vol.8, №3. -P.595-601.
- 13 Koç A., Ozaktas H.M., Candan C., Kutay M.A. Digital computation of linear canonical transforms // IEEE Trans. Signal Process. -2008. -Vol.56, №6. - P.2383-2394.
- 14 Li B.Z., Shi Y.P. Image watermarking in the linear canonical transform domain // Math. Probl. Eng. -2014. -P.1-9.
- 15 Moshinsky M., Quesne C. Linear canonical transform and their unitary representations // J. Math. Phys. -1971. -Vol.12. -P.1772-1783.
- 16 Pei S.C., Ding J.J. Eigenfunctions of linear canonical transform // IEEE Trans. Signal Process. -2002. -Vol.50, №1. -P.11-26.
- 17 Sharma K.K., Joshi S.D. Uncertainty principle for real signals in the linear canonical transform domains // IEEE Trans. Signal Process. -2008. -Vol.56, №7. - P.2677-2683.

- 18 Stern A. Sampling of linear canonical transformed signals // Signal Processing. -2006. -Vol.86, №7. -P.1421-1425
- 19 Stern A. Uncertainty principles in linear canonical transform domains and some of their implications in optics // Journal of the Optical Society of America A. -2008. -Vol.25, №3. -P.647-652.
- 20 Stern A. Why is the linear canonical transform so little known? // AIP Conference Processing. -2006. -Vol.860. -P.225-234.
- 21 Urynbassarova D., Teali A.A., Zhang F. Discrete quaternion linear canonical transform // Digital Signal Processing. -Vol.122. -2022. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103361>
- 22 Wei D.Y., Ran Q.W., Li Y.M. A convolution and correlation theorem for the linear canonical transform and its applications // Circuits, Systems, and Signal Processing. -2011. -Vol.31, №1. -P.301-312.
- 23 Wei D.Y., Ran Q.W., Li Y.M. New convolution theorem for the linear canonical transform and its translation invariance property // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2012. -Vol.123, №16. -P.1478-1481.
- 24 Zhang Z.C. New convolution structure for the linear canonical transform and its application in filter design // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2016. -Vol.127. -P.5259-5263.
- 25 Zhao J., Tao R., Li Y.L., Wang Y. Uncertainty principles for linear canonical transform // IEEE Transactions on Signal Processing. -2009. -Vol.57, №7. -P.2856-2858.
- 26 Abe S., Sheridan J.T. Optical operations on wave functions as the Abelian subgroups of the special affine Fourier transformation // Optics Letters. -1994. -Vol.19, №22. -P.1801-1803.
- 27 Goel N., Singh K. Convolution and correlation theorems for the offset fractional Fourier transform and its application // AEU–International Journal of Electronics and Communications. -2016. -Vol.70, №2. -P.138-150.
- 28 Pei S.C., Ding J.J. Eigenfunctions of the offset Fourier, fractional Fourier, and linear canonical transforms // Journal of the Optical Society of America A. -2003. -Vol.20, №3. -P.522-532.
- 29 Stern A. Sampling of compact signals in the offset linear canonical domain // Signal Image Video Process. -2007. -Vol.1, №4. -P.359-367.
- 30 Xiang Q., Qin K.Y. Convolution, correlation, and sampling theorems for the offset linear canonical transform // Signal Image Video Processing. -2012. -Vol.2014, №8. -P.433-442.
- 31 Almeida L.B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform // IEEE Signal Processing Letters. -1997, -Vol.4, №1. -P.15-17.
- 32 Almeida L.B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations // IEEE Transactions on Signal Process. -1994, -Vol.42, №11. -P.3084-3091.
- 33 Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics // Geoderma. -1980. -Vol.25, №3. -P.241-265.

- 34 Ozaktas H.M., Kutay M.A., Zalevsky Z. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing / -New York: Wiley, 2000.
- 35 Gdawiec K., Domańska D. Partitioned iterated function systems with division and a fractal dependence graph in recognition of 2D shapes // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. -2011. -Vol.21, №4. -P.757-767.
- 36 Bahri M. Correlation theorem for Wigner-Ville distribution // Far East Journal of Mathematical Sciences. -2013. -Vol.80, №1. -P.123-133.
- 37 Cohen L. Time-frequency distributions—a review // Proc. IEEE. -1989. -Vol.77, №7. -P.941-981.
- 38 Debnath L. Recent developments in the Wigner-Ville distribution and time frequency signal analysis // PINSA. -2002. -Vol.68A, №1. -P.35-56.
- 39 Grochenig K. Foundations of Time-frequency Analysis / Birkhäuser Boston, Mass, USA, 2001.
- 40 Johnston J.A. Wigner distribution and FM radar signal design // IEE Proc. F: Radar and Signal Processing. -1989. -Vol.136. -P.81-88
- 41 Pei S.C., Ding J.J. Fractional Fourier transform, Wigner distribution, and filter design for stationary and nonstationary random processes // IEEE Trans. Signal Process. -2010. -Vol.58. -P.4079-4092.
- 42 Zhang Z.Y., Levoy M. Wigner distributions and how they relate to the light field // IEEE International Conference Comput. Photography. -2009. -P.1-10.
- 43 De Luigi C., Moreau E. An iterative algorithm for estimation of linear frequency modulated signal parameters // IEEE Signal Processing Letters. -2002. -Vol.9, №4. -P.127-129.
- 44 Ikram M.Z., Meraim K.A., Hua Y. Estimating the parameters of chirp signals: an iterative approach // IEEE Transactions on Signal Process. -1998. -Vol.46, №12. -P.3436-3441.
- 45 Xia X.G., Discrete chirp-Fourier transform and its application to chirp rate estimation // IEEE Transactions on Signal Process. -2000. -Vol.48, №11. -P.3122-3133.
- 46 Wang M., Chan A.K., Chui C.K. Linear-frequency-modulated signal detection using Radon-ambiguity transform // IEEE Transactions on Signal Processing. -1998. -Vol.46, №3. -P.571-586.
- 47 Barbarossa S. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Winger-Hough transform // IEEE Transactions on Signal Process. -1995. -Vol.43, №6. -P.1511-1515.
- 48 Akay O., Boudreaux B G F. Fractional convolution and correlation via operator methods and application to detection of linear FM signals // IEEE Transactions on Signal Processing. -2001. -Vol.49. -P.979-993.
- 49 Cao R.Q, Li M., Lei Z., Wang Z.Y., Lu Y.L. A new method for parameter estimation of high-order polynomial-phase signals // Signal Process. -2018. -Vol.142. -P.212-222.

- 50 Tao R., Li Y.L., Wang Y. Short-time fractional Fourier transform and its applications // IEEE Transactions on Signal Processing. -2010. -Vol.58, №5. -P.2568-2580.
- 51 Pathak R.S. The Wavelet Transform / 4 Amsterdam, Atlantis Press/World Scientific, 2009.
- 52 Wei D.Y., Li Y.M. Generalized wavelet transform based on the convolution operation in the linear canonical transform domain // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2014. -Vol.125. -P.4491-4496.
- 53 Pei S.C., Ding J.J. Relations between fractional operations and time-frequency distributions, and their applications // IEEE Transactions on Signal Processing. -2001. -Vol.49, №8. -P.1638-1655.
- 54 Bai R.F., Li B.Z., Cheng Q.Y. Wigner-Ville distribution associated with the linear canonical transform // Journal of Applied Mathematics. -2012. -P.1-14.
- 55 Song Y.E., Zhang X.Y., Shang C.H., Bu H.X., Wang X.Y. The Wigner-Ville distribution based on the linear canonical transform and its applications for QFM signal parameters estimation // Journal of Applied Mathematics. -2014. 8 pages.
- 56 Bahri M., Ashino R. Convolution and correlation theorems for Wigner-Ville distribution associated with linear canonical transform // 12th International Conference on Information Technology–New Generations. -2015. -P.341-346.
- 57 Urynbassarova D., Li B.Z., Tao R. Convolution and correlation theorems for Wigner-Ville distribution associated with the offset linear canonical transform // Optik. -2018. -Vol.157.
- 58 Alieva T., Bastiaans M.J. Wigner distribution and fractional Fourier transform // International Symposium on Signal Processing and its Applications. -2003. -Vol.1, №12. -P.168-169.
- 59 Li Y.G., Li B.Z., Sun H.F. Uncertainty principles for Wigner-Ville distribution associated with the linear canonical transforms // Abstract and Applied Analysis. -2014. -P.1-9.
- 60 Liu L., Luo M., Lai L. Instantaneous frequency estimation based on the Wigner-Ville distribution associated with linear canonical transform (WDL) // Chinese Journal of Electronics. -2018. -Vol.27, №1. -P.123-127.
- 61 Urynbassarova D., Li B.Z., Tao R. The Wigner-Ville distribution in the linear canonical transform domain // IAENG International Journal of Applied Mathematics. -Vol.46, №4. -2016.
- 62 Wei D.Y., Li Y. Linear canonical Wigner distribution and its application // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2014. -Vol.125, №1. -P.89-92.
- 63 Yan J.P., Li B.Z., Xu T.Z. Wigner distribution moments associated with the linear canonical transform // Int. J. Electron. -2013. -Vol.100, №4. -P.473-481.
- 64 Zhang Z.C. New Wigner distribution and ambiguity function based on the generalized translation in the linear canonical transform domain // Signal Processing. -2016. -Vol.118. -P.51-61.

- 65 Zhang Z.C. Novel Wigner distribution and ambiguity function associated with the linear canonical transform // *Optik–International Journal for Light and Electron Optics*. -2016. -Vol.127. -P.4995-5012.
- 66 Zhang Z.C. Unified Wigner-Ville distribution and ambiguity function in the linear canonical transform domain // *Signal Processing*. -2015. -Vol.114, №C. -P.45-60.
- 67 Zhuo Z.H., Ning Z., Xie Y.A., Zhan X.U. Entropic uncertainty relations of the Wigner-Ville distribution in linear canonical transform domain // *Transactions of Beijing Institute of Technology*. -2017. -Vol.37, №9. -P.948-952.
- 68 Urynassarova D., Urynassarova A. Chapter: Hybrid Transforms. / In book *Time Frequency Analysis of Some Generalized Fourier Transforms*. IntechOpen; 2023. <http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.108186>.
- 69 Posch T.E. *The Wave Packet Transform as Applied to Signal Processing* / Victoria, BC. -Canada, 1992.
- 70 Torresani B. Time-frequency representations: wavelet packets and optimal decomposition // *Ann. Inst. Henri Poincare*. -1992. -Vol.56. -P.215–234.
- 71 Mann S., Haykin S. The chirplet transform: physical considerations // *IEEE Transactions on Signal Processing*. -1995. -Vol.43, №11. -P.2745-2761.
- 72 Castro L.P., Haque M.R., Murshed M.M., Saitoh S., Tuan N.M. Quadratic Fourier transforms // *Ann. Funct. Anal.* -2014. -Vol.5, №1. -P.10–23. <http://dx.doi.org/10.15352/afa/1391614564>.
- 73 Castro L.P., Minh L.T., Tuan N.M. New convolutions for quadratic-phase Fourier integral operators and their applications // *Mediterr. J. Math.* -2018. -Vol.15, №13. -P.1–17. <http://dx.doi.org/10.1007/s00009-017-1063-y>.
- 74 Prasad A., Sharma P.B. The quadratic-phase Fourier wavelet transform // *Math. Methods Appl. Sci.* -2019. -P.1–17.
- 75 Shah F.A., Nisar K.S., Lone W.Z., Tantary A.Y. Uncertainty principles for the quadratic-phase Fourier transforms // *Math. Methods Appl. Sci.* -2021. <http://dx.doi.org/10.1002/mma.7417>.
- 76 Li Y., Wei D. The wave packet transform associated with the linear canonical transform // *Optik*. -2015.
- 77 Prasad A., Kundu M. Linear canonical wave packet transform // *Integral Transforms and Special Functions*. -2020.
- 78 Wei D.Y., Zhang Y.J. A new fractional wave packet transform // *Optik*. -2021. -Vol.231. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.166357>.
- 79 Bas P., Le Bihan N., Chassery J.M. Color image watermarking using quaternion Fourier transform / *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP'03)*, Hong-Kong: 2003. -P.521-524. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2003.1199526>
- 80 Sangwine S.J., Ell T.A. Hypercomplex Fourier transforms of color images // *IEEE Trans. Image Process.* -2001. -Vol.16. -P.137–140. <https://doi.org/10.1109/ICIP.2001.958972>
- 81 Ouyang J., Coatrieux G., Shu H.Z. Robust hashing for image authentication using quaternion discrete Fourier transform and log-polar transform //

Digit. Signal Process. -2015. -Vol.41. -P. 98-109.
<https://doi.org/10.1016/j.dsp.2015.03.006>.

82 Ell T.A. Quaternion-Fourier transforms for analysis of two-dimensional linear time-invariant partial differential systems / Proceeding of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control. San Antonio: 1993 -P.1830-1841.
<https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325510>.

83 Bahri M., Amir A.K., Resnawati, Lande C. The quaternion domain Fourier transform and its application in mathematical statistics // IAENG International Journal of Applied Mathematics. -2018. -Vol.48. -P.184-190.

84 Pei S.C., Ding J.J., Chang J.H. Efficient implementation of quaternion Fourier transform, convolution, and correlation by 2-D complex FFT // IEEE Trans. Signal Process. -2001. -Vol.49, №11. -P.2783-2797.
<https://doi.org/10.1109/78.960426>

85 Xu L., Wang X.T., Xu X.G. Fractional quaternion Fourier transform, convolution and correlation // Signal Process. -2008. -Vol.88 №10. P.2511-2517.
<https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2008.04.012>

86 Bahri M., Quaternion linear canonical transform application // Global Journal of Pure & Applied Mathematics. -2015. -Vol.11. -P.19-24.

87 Bahri M., Ashino R. Two-dimensional quaternion linear canonical transform: properties, convolution, correlation, and uncertainty principle // Journal of Mathematics. -2019. <https://doi.org/10.1155/2019/1062979>

88 Roopkumar R. Quaternionic one-dimensional fractional Fourier transform // Optik. -2016. -Vol.127, №24, -P.11657-11661.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijleo.2016.09.069>.

89 Samad M. A., Xia Y., Siddiqui S., Bhat M. Y., Urynbassarova D., Urynbassarova A. Quaternion fractional Fourier transform: bridging signal processing and probability theory // Mathematics. -2025. -Vol.13, № 2. <https://doi.org/10.3390/math13020195>.

90 Темирбеков Н.М., Касенов С.Е., Байгереев Д.Р., Урынбасарова Д.Ж., Урынбасарова А.Ж., Тамабай Д.О., Темирбекова Л.Н. Кватернионные преобразования Фурье и их применение в задачах геофизики и геохимии / Монография под общ. ред. Темирбекова Н.М., колл. авт. – Алматы: Everest, - 2024.

91 Urynbassarova D, Urynbassarova A., Al-Hussam E. The Wigner-Ville distribution based on the offset linear canonical transform domain / Proceedings of the 2nd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM2017), Thailand: -2017. -P.139-142. <http://dx.doi.org/10.2991/msam-17.2017.31>.

92 Bhat M.Y., Dar A.H., Urynbassarova D., Urynbassarova A. Quadratic-phase wave packet transform // Optik. -2022. -Vol.261. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169120>.

93 Bahri M., Ashino R. Some properties of windowed linear canonical transform and its logarithmic uncertainty principle // International Journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing. -Vol.14, №3. -2016. 1650015.

- 94 Wigner E.P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys Rev. -1932. -Vol.40, №5. -P.749-759.
- 95 Ville J Theorie et applications de la notion de signal analytique // Cables et Transmissions. -1948. -Vol.2A, №1. -P.61-74.
- 96 Pei S.C., Ding J.J. Relation between Gabor transform and its fractional Fourier transforms and their applications for signal processing // IEEE Trans, Signal Processing. -2007. -Vol.55. -P.4839-4850.
- 97 Hernández E., Šikić H., Weiss G.L., Wilson E.N. The Zak transform(s) / In: Cohen J., Zayed A. (eds) Wavelets and Multiscale Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser, Boston, 2011, -P.151-157.
- 98 Janssen A J E M. The Zak transform: a signal transform for sampled time-continuous signals // Philips J. Research. -1988. -Vol.43. -P.23-69.
- 99 Debnath L. Wavelet Transforms and their Applications / Birkhauser. - Boston: MA, 2002.
- 100 Collins S.A., Lens-system diffraction integral written in term of matrix optics // Journal of the Optical Society of America. -1970. -Vol.60, №9. -P.1168-1177.
- 101 Hennelly B., Sheridan J. Generalizing, optimizing, and inventing numerical algorithms for the fractional Fourier, Fresnel, and linear canonical transforms // Journal of the Optical Society of America A. -2005. -Vol.22. -P.917-927.
- 102 Daniel F. V. James, Girish S. Agarwal. The generalized Fresnel transform and its application to optics // Optics Communications. -1996. -Vol.126. -P.207-212.
- 103 Nazarathy M., Shamir J. First-order optics: operator representation for systems with loss or gain // Journal of the Optical Society of America. -1982. -Vol.72. -P.1398-1408.
- 104 Bernardo L.M. ABCD matrix formalism of fractional Fourier optics // Opt. Eng. -1996. -Vol.35, №3. -P.732-740.
- 105 James D F V, Agarwal G.S. The generalized Fresnel transform and its applications to optics // Opt. Commun. -1996. -Vol.126, №5. -P.207-212.
- 106 Kou K.I., Xu R.H. Windowed linear canonical transform and its application // Signal Process. -2012. -Vol.92. -P.179-188.
- 107 Wei D.Y., Li Y.M. Generalized Gabor expansion associated with linear canonical transform series // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2014. -Vol.125. -P.4349-4397.
- 108 Bhandari A., Zayed A. Convolution and product theorem for the special affine Fourier transform // Mathematics. -2015.
- 109 Zhi X.Y., Wei D.Y., Zhang W. A generalized convolution theorem for the special affine Fourier transform and its application to filtering // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2016. -Vol.127, №5. -P.2613-2616.
- 110 Pei S.C., Ding J.J. Eigenfunctions of Fourier and fractional Fourier transforms with complex offsets and parameters // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. -2007. -Vol.54, №7. -P.1599-1611.
- 111 Bracewell R.N. The Hartley Transform / First edition, Oxford University Press. -1986.

- 112 Luo Y., Schuster G.T. Wave packet transform and data compression // SEG Tech. Prog. Expanded Abstracts. -1992. -Vol.11, №4. -P.1187–1190.
- 113 Posch T.E. The wave packet transform as applied to signal processing // Conference record of the twenty-sixth asilomar conference on signals, Syst. Comput. -1992. -P.484–487.
- 114 Shah F.A., Lone W.Z., Tantary A.Y. Short-time quadratic-phase Fourier transform // Optik. -Vol.245. -2021. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.167689>.
- 115 Lohmann A.W. Image rotation, Wigner rotation and the fractional Fourier transform // Journal of the Optical Society of America A. -1993. -Vol.10. -P.2181-2186.
- 116 Zhang Z.C., Luo M.K. New integral transforms for generalizing the Wigner distribution and ambiguity function // IEEE Signal Processing Letters. -2015. -Vol.22. -P.460-464. <http://dx.doi.org/10.1109/LSP.2014.2362616>
- 117 Xin H.C., Li B.Z. On a new WignerVille distribution associated with linear canonical transform // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. -2021. -Vol.56. <http://dx.doi.org/10.1186/s13634-021-00753-3>.
- 118 Bahri M., Muh. Saleh A.F. Relation between quaternion Fourier transform and quaternion Wigner-Ville distribution associated with linear canonical transform // Journal of Applied Mathematics. -2017. 1-10. <http://dx.doi.org/10.1155/2017/32473641>
- 119 Fan X.L., Kou K.I., Liu M.S. Quaternion Wigner-Ville distribution associated with the linear canonical transforms // Signal Processing. -2017. -Vol.130. -P.129-141.
- 120 Urynbassarova D., El Haoui, Y., Zhang F. Uncertainty principles for Wigner-Ville distribution associated with the quaternion offset linear canonical transform // Circuits systems and signal processing. -2023. –Vol.42. -P.385-404.
- 121 Bhat M.Y., Dar A.H. Wigner distribution and associated uncertainty principles in the framework of octonion linear canonical transform // Optik. -Vol.272. -2023. 170213.
- 122 Che T.W., Li B.Z., Xu T.Z. The ambiguity function associated with the linear canonical transform // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. -2012. -Vol.2012, №4. -P.1-14.
- 123 Tao R., Song Y.E., Wang Z.J., Wang Y. Ambiguity function based on the linear canonical transform // IET Signal Processing. -2012. -Vol.6, №6. -P.568-576.
- 124 Zhao H., Ran Q.W., Ma J., Tan L.Y. Linear canonical ambiguity function and their linear canonical transform moments // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2011. -Vol.122. -P.540-543.
- 125 Cohen L. Time-Frequency Analysis / Englewood Cliffs, Prentice Hall. -New Jersey, 1995.
- 126 Freysz E., Pouligny B., Argoul F., Arneodo A. Optical wavelet transform of fractal aggregates // Phys. Rev. Lett. -1990. -Vol.64. -P.745–748.
- 127 Torresani B., Wavelets associated with representations of the affine Weyl-Heisenberg group // J. Math. Phys. -1991. -Vol.32. -P.1273–1279.

- 128 Pommer A., Uhl A. Selective encryption of wavelet packet subband structures for secure transmission of visual data // IEEE Benelux Signal Process. Symp. -2002. -P.25-28.
- 129 Sui X., Wan K., Zhang Y. Pattern recognition of SEMG based on wavelet packet transform and improved SVM // Optik. -2019. -Vol.176. -P.228–235.
- 130 Yang H. Synchrosqueezed wave packet transforms and diffeomorphismbased spectral analysis for 1D general mode decompositions // Applied and Computational Harmonic Analysis -2015. -Vol.39, №1. -P.33–66.
- 131 Yi Q., Wang H., Guo R., Li S., Jiang Y. Laser ultrasonic quantitative recognition based on wavelet packet fusion algorithm and SVM // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2017. -Vol.149. -P.206-219.
- 132 Zarowski C.J. Wavelet packet transform initialization for piecewise polynomial and bandlimited inputs // IEEE Trans. Signal Process. -1999. -Vol.47. -P.224-226.
- 133 Zhang H., Zhang J., Qiu K. Performance comparison of wavelet packet transform based and conventional coherent optical OFDM transmission system // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2014. -Vol.125. -P.2647-2651.
- 134 Barros J., Diego R.I. Analysis of harmonics in power systems using the wavelet-packet transform // IEEE Trans. Instrum. Meas. -2008. -Vol.57, №1. -P.63-69.
- 135 Partington J.R., Unalmış B. On the windowed Fourier transform and wavelet transform of almost periodic functions // Appl. Comput. Harmon. Anal. -2001. -Vol.10, №1. -P.45–60.
- 136 Bhat M.Y., Dar A.H. The 2-D hyper-complex Gabor quadratic-phase Fourier transform and uncertainty principles // J Anal. -2023. -Vol.31. -P.243-260. <https://doi.org/10.1007/s41478-022-00445-7>
- 137 Bhat M.Y., Dar A.H. Towards quaternion quadratic-phase Fourier transform // Mathematical Methods in the Applied Science. -2023. -P.1-20. <https://doi.org/10.1002/mma.9126>.
- 138 Bhat M.Y., Dar A.H. Wigner-Ville distribution and ambiguity function associated with the quadratic-phase Fourier transform // Annals of the university Craiova, Mathematics and Computer Sciences series. -2023. -Vol.50, №2. <https://doi.org/10.52846/ami.v50i2.1640>
- 139 Saitoh S. Theory of reproducing kernels: Applications to approximate solutions of bounded linear operator functions on Hilbert spaces // Amer. Math. Soc. Trans. Ser. -2010. -Vol.230, №2. -P.107-134.
- 140 Chui C.K. An Introduction to Wavelets / Academic Press. -New York, 1992. <http://dx.doi.org/10.2307/2153134>.
- 141 Daubechies I. Ten lecture on wavelets / CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM Publ. -Philadelphia: PA, 2006.
- 142 Perrier V., Basdevant C. Besov norms in terms of the continuous wavelet transform application to structure functions // Mathematical Models and Methods in Appl. Sci. -1996. -Vol.6, №5. -P.649-664.

- 143 Prasad A., Manna S., Mahato A., Singh V.K. The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform // J. Comput. Appl. Math. -2014. -Vol.259. -P.183-194.
- 144 Rieder A. The wavelet transform on Sobolev spaces and its approximation properties // Numer. Math. -1991. -Vol.58, №8. -P.875-894.
- 145 Mendlovic D., Zalevsky Z., Mas D., Garcia J., Ferreira C. Fractional wavelet transform // Appl. Opt. -1997. -Vol.36, №20. -P.4801-4806.
- 146 Shi J., Zhang N., Liu X. A novel fractional wavelet transform and its applications // Sci. China Inf. Sci. -2012. -Vol.55, №6. -P.1270-1279.
- 147 Wei D., Li Y.M. Generalized wavelet transform based on the convolution operator in the linear canonical transform domain // Optik–International Journal for Light and Electron Optics. -2014. -Vol.125, №16. -P.4491-4496.
- 148 Guo Y., Li B.Z. The linear canonical wavelet transform on some function space // International Journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing. -2018. -Vol.16, №1.
- 149 Ekasasmita W., Bahri M., Bachtiar N., Rahim A., Nur M. One-Dimensional Quaternion Fourier Transform with Application to Probability Theory // Symmetry, 2023, 15, 815.
- 150 Hamilton W.R. Elements of Quaternions. Longmans, Green: London, UK, 1866.
- 151 Bihan N.L., Sangwine S.J. Quaternionic Spectral Analysis of Non-Stationary Improper Complex Signals / Quaternion and Clifford Fourier Transforms and Wavelets. Hitzler E., Sangwine S., Eds. Trends in Mathematics: Birkhäuser, Basel, 2013. -P.41-56.
- 152 Li S., Leng J., Fei M. The Quaternion-Fourier Transform and Applications // Communications and Networking. Liu X., Cheng D., Jinfeng L., Eds. ChinaCom, Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering. Springer: Cham, Switzerland, 2018. -Vol.262. -P.157-165.
- 153 Nurwahidah N., Bahri M., Rahim A. Two-Dimensional Quaternion Fourier Transform Method in Probability Modeling // Symmetry 2024. -Vol.16, №3:257.
- 154 Siddiqui S., Samad M.A., Ismoiljonovich F.D. One dimensional quaternion linear canonical transform in probability theory // Signal Image Video Process. -2024. -Vol.18. -P.9419–9430.
- 155 Morais J., Georgiev S., Sprosig W. Real Quaternion Calculus Handbook / Springer: Basel, Switzerland, 2014.
- 156 <https://is.ncste.kz/object/view/Y1VBSnc2L0tPZkZQUmQyQTcwUEhoQT09>.

ҚОСЫМША А

ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған басылымдар тізіміне кіретін «АУЭС Хабаршысы» журналына жіберілген мақала бойынша мәлімет

[Вестник] Подтверждение отправки

Шуебаева Динара Амангельдиевна via Вестник Ауэс
16 мая, 16:10
Кому: вам



Здравствуйте, Altyn Urynassarova!

Благодарим Вас за отправку материала «ОБНАРУЖЕНИЕ ЛИНЕЙНО-ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИГНЕРА-ВИЛЯ И ГИБРИДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ» в журнал «Вестник Ауэс». С помощью онлайн-системы управления журналом, которую мы используем, Вы сможете отслеживать его прохождение через редакционный процесс, заходя на сайт журнала:

URL материала: <https://vestnik.aues.kz/index.php/none/authorDashboard/submission/1295>
Имя пользователя: altynurynassarova

Если у Вас возникнут какие-то вопросы, пожалуйста, свяжитесь со мной. Спасибо за выбор нашего журнала для публикации Вашей работы.

Шуебаева Динара Амангельдиевна

[Вестник Ауэс](#)

Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева
050013, г. Алматы, Байтурсынулы 126/1
тел. +7 727 323 11 75
energo.university

ҚОСЫМША Ә

Кітапхана анықтамасы

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ
ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

ӘЛ-ФАРАБИ КІТАПХАНАСЫ

050040, Алматы қаласы
әл-Фараби даңғылы, 71
Тел.: +7(727) 377-33-33
e-mail: library@kaznu.kz
<http://elibrary.kaznu.kz>



КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

БИБЛИОТЕКА АЛЬ-ФАРАБИ

050040, г. Алматы
пр. аль-Фараби, 71
Тел.: +7(727) 377-33-33
e-mail: library@kaznu.kz
<http://elibrary.kaznu.kz>

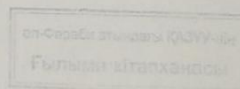
Анықтама

Урынбасарова Алтын Жумаситовнаға әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті кітапханасында автордың кітабының тіркелгенін растау үшін берілді.

1. Кватернионные преобразования Фурье и их применение в задачах геофизики и геохимии : монография / Н. М. Темирбеков, С. Е. Касенов, Д. Р. Байгереев, Д. Ж. Урынбасарова, А. Ж. Урынбасарова, Д. О. Тамабай, Л. Н. Темирбекова; под общ. ред. Н. М. Темирбеков ; М-во науки и высшего образования РК, Национальная Инженерная Академия РК. - Алматы : Everest, 2024. – 138 с.

Қорды жинақтау және
сервистік қолдау басқармасы
басшысы

Г. К. Еслямғалиева
28.02.2025 ж.



ҚОСЫМША Б

Енгізу актысы



010000 Астана қ., Қабанбай батыр даңғ., ғ. 53/11, блок 53.
Тел.: +7 (777) 202-43-51, +7 (777) 202-43-50

010000 г. Астана, пр. Қабанбай батыра, зл. 53/11, блок 53
Тел.: +7 (777) 202-43-51, +7 (777) 202-43-50

исх. №03-25
от «13» февраля 2025 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы
Урынбасаровой Алтын Жумаситовны
на тему: «Жүйелердегі сигналдарды өңдеу мәселелерін шешу үшін гибриді
түрлендірулерді құру»

Настоящим подтверждаем, что результаты диссертационного исследования Урынбасаровой Алтын Жумаситовны на тему: «Жүйелердегі сигналдарды өңдеу мәселелерін шешу үшін гибриді түрлендірулерді құру», были успешно испытаны и внедрены в производственных условиях в период с сентября по октябрь 2024 г. в ТОО «UMAY R&D».

В рамках внедрения в процесс обязательных приемо-сдаточных виброакустических испытаний в трансформаторном производстве модуля обработки сигналов, основанного на методе квадратно-фазового вейвлет-пакетного преобразования (QP-WPT), предложенного в диссертационном исследовании Урынбасаровой А.Ж., были достигнуты следующие результаты:

- 1) Обеспечение повышения точности распознавания образов, благодаря чему произошло снижение времени обработки уровня звука производимых нашим предприятием шунтирующих масляных реакторов классов напряжения 110–750 кВ.;
- 2) Применение оптимизационных алгоритмов обработки сигналов позволило повысить эффективность фильтрации шумов в среднем на 15%;
- 3) Получен экономический и социальный эффект от внедрения, заключающийся в повышении качества продукции и улучшении условий труда.

Таким образом, внедрение результатов исследования Урынбасаровой Алтын Жумаситовны в области обработки сигналов подтверждает их актуальность и практическую значимость для инжинирингового производства.

Генеральный директор
ТОО «Umay R&D»



Құрал А.Ж.

ҚОСЫМША В

Анықтама

РҚБ «ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ
ҰЛТТЫҚ ИНЖЕНЕРЛІК АКАДЕМИЯСЫ»



РОО «НАЦИОНАЛЬНАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ
АКАДЕМИЯ» РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

050010, Алматы қаласы, Бөгенбай батыр көшесі, 80
тел.: (727) 291-52-90, тел.факс: (727) 291-51-90
e-mail: nia_rk@mail.ru

050010, г.Алматы, ул.Бөгенбай батыра, 80
тел.: (727) 291-52-90, тел.факс: (727) 291-51-90
e-mail: nia_rk@mail.ru

20 23 жылғы «18» маус

от « » 20 года

№ 2023/05

Справка

Дана Урынбасаровой Алтын Жумаситовне в том, что она действительно работает научным сотрудником в проекте по теме «Построение и исследование кватернионных преобразований Фурье и их применение в создании информационных систем для задач геофизики и геохимии» которая выиграла в конкурсе по грантовому финансированию фундаментальных и прикладных научных исследований по научным и научно-техническим проектам на 2022-2024 годы (ИРН проекта AP14871252) направленных на реализацию программных документов Республики Казахстан. Проект входит в приоритетное направление развития науки Республики Казахстан, а именно в Информационные, коммуникационные и космические технологии.

Главный ученый секретарь
Президиума НИА РК



Имангалиев Е.И.

ҚОСЫМША Г

MATLAB кодтары

MATLAB бағдарламалық тілінде әзірленген арнайы қолданбанының коды дискте сақталды. Қолданбаның коды MATLAB бағдарламасының R2022b версиясында жазылды.

АРНАУ

Бұл диссертацияны ақпейіл ардақты анам *Балмағамбетова Рахима Еришановнаға* арнаймын. Менің жетістіктерім оның өмір бойы жасаған талпынысы, тілегі, шабыттандыратын сөздері мен жігерінің жемісі. Диссертациялық жұмысымды жазуда қолдау көрсеткені үшін алғысымды білдіремін.